UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 14.05.2024

6. Übung zur Linearen Algebra 2

6.1. *(Gram–Schmidt-Verfahren)* (4 Punkte)
Sei $V = \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der reellen Polynome. Durch die polynomiellen Abbildungen ist V ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle \_, \_ \rangle$ definiert durch $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Berechnen Sie mit dem Gram–Schmidt-Verfahren ausgehend von der Basis $(1, X, X^2, X^3)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[X]^{\leq 3}$.
Hinweis: Sollten Ihnen in Ihrem bisherigen Studium noch keine Integrale begegnet sein, nutzen Sie die aus der Schule bekannte Integrationsregel für Polynome: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f = \sum_{i\geq 0} \lambda_i X^i \in \mathbb{R}[X]$. Dann gilt $\int_a^b f(x)dx = (\sum_{i\geq 0} \frac{\lambda_i}{i+1} b^{i+1}) - (\sum_{i\geq 0} \frac{\lambda_i}{i+1} a^{i+1})$.

6.2. *(Skalarprodukte und Normen)* (4 Punkte)
Sei V mit $\langle \_, \_ \rangle$ ein euklidischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Für $v, w \in V$ gilt die sogenannte ***Parallelogramm-Identität***:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

(b) $\langle \_, \_ \rangle$ lässt sich aus $\|\_\|$ rekonstruiert: Es gilt nämlich die sogenannte ***Polarisationsformel*** $4\langle v, w \rangle = \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2$ für alle $v, w \in V$.
(Bemerkung: Für unitäre Räume gilt eine ähnliche Formel.)

(c) Wir betrachten $\|\_\|_\infty \colon \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ definiert durch $\|(v_1, v_2)\|_\infty := \max\{|v_1|, |v_2|\}$. Dann erfüllt $\|\_\|_\infty$ die drei Eigenschaften aus Lemma 7.1.18: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\|x\|_\infty = 0$ genau dann wenn $x = (0, 0)$; (***Definitheit***)
- $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \, \|x\|_\infty$; (***Positive Homogeinität***)
- $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. (***Dreiecksungleichung***)

(d) Es gibt *kein* Skalarprodukt $\langle \_, \_ \rangle$ auf $V = \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für alle $x \in V$.

6.3. *(Hessesche Normalform für Geraden im $\mathbb{R}^2$)* (4 Punkte)
Unter einer ***Geraden*** $L \subset \mathbb{R}^2$ verstehen wir einen *eindimensionalen affinen Unterraum* des $\mathbb{R}^2$, also $L = b + \mathbb{R}v = \{ b + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R} \}$ mit $b, v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$. Sei $\langle \_, \_ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) Für $n, b' \in \mathbb{R}^2$ mit $n \neq 0$ ist $L_{n,b'} := \{ u \in \mathbb{R}^2 : \langle n, u - b' \rangle = 0 \}$ eine Gerade.

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 22.05.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
`https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381`

(b) Jede Gerade $L = b + \mathbb{R}v$ schreibt sich in der Form $L = L_{n,b'}$ für geeignete $n, b' \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie geeignete n und b' für die Gerade

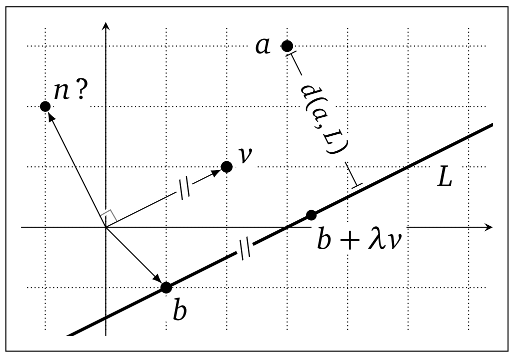
$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Der minimale Abstand $d(a, L) := \min\{\, \|a - u\| : u \in L \,\}$ von einem Punkt $a \in \mathbb{R}^2$ zu der Geraden $L = L_{n,b'}$ ist durch die Formel

$$d(a, L_{n,b'}) = \frac{|\langle n, a - b' \rangle|}{\|n\|}$$

gegeben. Bestimmen Sie damit $d((3,3), L_0)$ für L_0 aus (b).

($\star$) *(Ohne Punktwertung, zur Diskussion in den Übungen:)*
Welche Wahlfreiheit hat man in (b) für n und b' bei fixierter Gerade L?



6.4. *(Kreuzprodukt)* (4 Punkte)

Mit e_1, e_2 und e_3 seien die drei Standardeinheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet und $\langle \_, \_ \rangle$ sei im Folgenden das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$. Für Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ definieren wir deren ***Kreuzprodukt*** $v \times w$ durch

$$v \times w := \text{„}\det\begin{pmatrix} e_1 & | & | \\ e_2 & v & w \\ e_3 & | & | \end{pmatrix}\text{“} := e_1 \det\begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} - e_2 \det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} + e_3 \det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix},$$

wobei die rechte Seite durch formale Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte entsteht. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $u \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle u, v \times w \rangle = \det\begin{pmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{pmatrix}$. (Hinweis: Laplace-Entwicklung.)

(b) Es gilt $v \times w \perp \operatorname{span}(v, w)$ (d.h. $\langle u, v \times w \rangle = 0$ für alle $u \in \operatorname{span}(v, w)$) und $v \times w$ ist genau dann der Nullvektor, wenn v und w linear abhängig sind.

(c) Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt $A^{\mathrm{T}}((Av) \times (Aw)) = (\det A)(v \times w)$.
(Hinweis: Begründen Sie, dass es genügt, $\langle u, A^{\mathrm{T}}((Av) \times (Aw)) \rangle = \langle u, (\det A)(v \times w) \rangle$ für alle $u \in \mathbb{R}^3$ zu zeigen. Der Vorteil, den man sich damit erkauft ist, dass man (a) ins Spiel bringen kann.)

(d) Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A^{\mathrm{T}}A = E_3$ und $\det A = 1$ gilt $A(v \times w) = (Av) \times (Aw)$. (Hinweis: (c).)