Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 21.05.2024

7. Übung zur Linearen Algebra 2

7.1. *(Kreuzprodukt, II)* (4 Punkte)
Sei $\langle \_, \_ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ und $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ sei eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich $\langle \_, \_ \rangle$. Mit „$\times$" sei das Kreuzprodukt aus Aufgabe 6.4 bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ für die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto v \times b_1$.

(b) Bestimmen Sie $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(g)$ für die lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto v - 2\langle b_1, v\rangle b_1$.

($\star$) *(Ohne Punktwertung, zur Diskussion in den Übungen:)*
Beschreiben Sie, was die Abbildungen f und g geometrisch bewirken.

7.2. *(Orthogonales Komplement)* (4 Punkte)
Sei $V = \mathbb{R}^5$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt. Wir betrachten den Unterraum

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \in V : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis für das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U:

$$U^\perp = \{ v \in V : \langle u, v\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U \}.$$

7.3. *(Folgenraum)* (4 Punkte)
Sei

$$V = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{es gibt } k \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n = 0 \text{ für alle } n \geq k \}$$

der $\mathbb{R}$-Vektorraum der abbrechenden reellen Folgen.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle a, b\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ definiert wird.
Hinweis: Die Definition dieses Skalarprodukts sieht aus, als würde sie unendliche Summen nutzen. Da aber nur abbrechende Folgen betrachtet werden, treten tatsächlich nur endliche Summen auf.

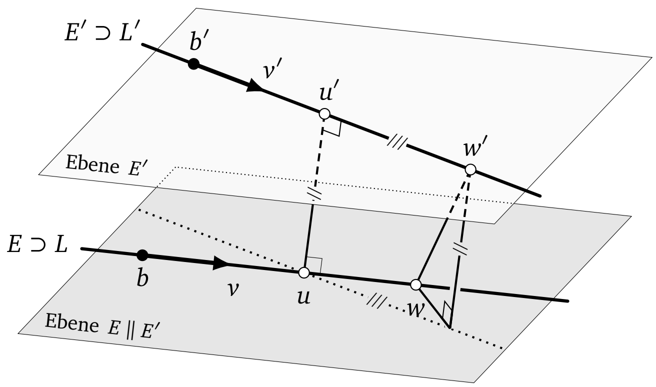
Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 29.05.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
`https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381`

(b) Für $i \in \mathbb{N}$ sei $e_i \in V$ die Folge mit dem Eintrag 1 an der i-ten Stelle und Null sonst. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ der Unterraum

$$U := \langle e_2 - e_1, e_3 - e_1, \ldots \rangle.$$

Bestimmen Sie $U^\perp$ und zeigen Sie, dass $U \oplus U^\perp \neq \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ist.

7.4. *(Abstand windschiefer Geraden)* (4 Punkte)
Wir betrachten zwei ***windschiefe*** Geraden $L = b + \mathbb{R}v \subset \mathbb{R}^3$ und $L' = b' + \mathbb{R}v' \subset \mathbb{R}^3$, d.h. die Vektoren $v, v' \in \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig sind und es ist $L \cap L' = \emptyset$ (äquivalent dazu: $(b-b', v, v')$ ist linear unabhängig). Wir interessieren uns für den *minimalen Abstand* $d(L, L') := \min\{\, \|w - w'\| : w \in L, w' \in L' \,\}$ zwischen L und L'.



(a) Zeigen Sie: Sind $u \in L$ und $u' \in L'$ mit $(u - u') \perp v, v'$, so gilt $d(L, L') = \|u - u'\|$. (Hinweis: Das ist eine Anwendung des Satzes von Pythagoras, welche Sie schon aus der Lösung von Aufgabe 6.3 kennen. Betrachten der obigen Skizze mag hilfreich sein.)

(b) Wir schreiben $x := b - b'$. Um Punkte u und u' wie in (a) zu bestimmen, suchen wir Skalare $\lambda, \lambda', \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$x + \lambda v - \lambda' v' - \mu(v \times v') = 0. \qquad (\perp)$$

(Dann erfüllen $u = b + \lambda v$ und $u' = b' + \lambda' v'$ die Voraussetzung von (a).)
Wenden Sie $\langle \_, x \times v \rangle$, $\langle \_, v \times v' \rangle$ und $\langle \_, x \times v' \rangle$ auf $(\perp)$ an und leiten Sie daraus eine Formel für $d(L, L')$ her.

(c) Bestimmen Sie $d\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.