UNIVERSITÄT PADERBORN
Sommersemester 2024
Paderborn, den 28.05.2024

UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

8. Übung zur Linearen Algebra 2

8.1. *(Orthogonale Projektion)* (4 Punkte)
Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und den Unterraum U, der von den Vektoren $(1,-1,0)$ und $(1,1,1)$ erzeugt wird.

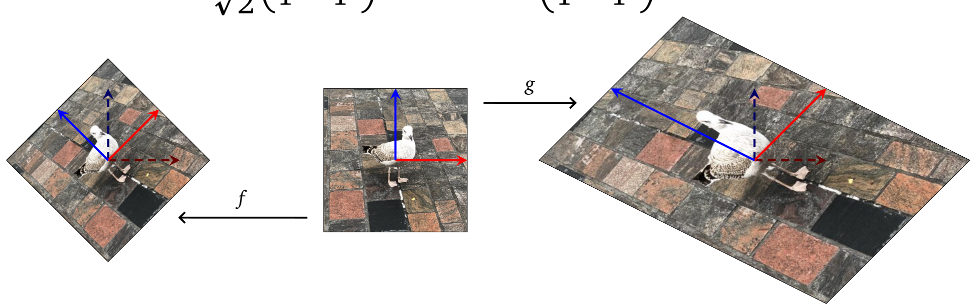
(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (b_1, b_2, b_3) des $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{span}(b_1, b_2) = U$ und $\operatorname{span}(b_3) = U^\perp$. (Hinweis: Beweis von Satz 7.3.10 (2).) ⟦∗⟧

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der orthogonalen Projektion $p_U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf U bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) und bezüglich (b_1, b_2, b_3). ⟦∗⟧

(c) Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion $p_{U^\perp}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf $U^\perp$ durch $p_{U^\perp} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - p_U$ gegeben ist. ⟦∗∗⟧

8.2. *(Längenerhaltende Abbildungen)* (4 Punkte)
Wir betrachten $\mathbb{R}^2$, ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt, und die linearen Abbildungen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v, \quad g(v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v.$$



(a) Bestimmen Sie die Art des abgebildeten Vogels. ⟦∗∗∗⟧

(b) Weisen Sie nach, dass f *Skalarprodukt und Längen erhält* (d.h. $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ und $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$), g jedoch nicht. ⟦∗⟧

(c) Sei V der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ oder der unitäre Raum $\mathbb{C}^n$ (jeweils mit dem Standardskalarprodukt) und $h\colon V \to V$, $v \mapsto Av$, sei eine lineare Abbildung, beschrieben durch eine $n \times n$-Matrix A. Zeigen Sie, dass h genau dann Skalarprodukt und Längen erhält, wenn $\overline{A}^{\mathrm{T}} A = E_n$ gilt. ⟦∗∗⟧

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 05.06.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
`https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381`

8.3. *(Regeln für das orthogonales Komplement)* (4 Punkte)

Sei U ein Unterraum eines euklidischen/unitären Raums V. Beweisen Sie die folgenden Regeln für das orthogonale Komplement:

(a) $\{0\}^\perp = V$ und $V^\perp = \{0\}$. ⟦∗⟧

(b) Sei $W \subseteq U$ ein weiterer Unterraum von V. Dann ist $U^\perp \subseteq W^\perp$. ⟦∗⟧

(c) U und $U^\perp$ sind orthogonal zueinander. ⟦∗⟧

(d) $U \subseteq U^{\perp\perp}$. ⟦∗⟧

(e) Für endlich-dimensionale Räume V gilt sogar $U = (U^\perp)^\perp$. ⟦∗∗⟧

Beweisen oder widerlegen Sie zudem die folgende Aussage:

(f) $U = (U^\perp)^\perp$ gilt auch für unendlich-dimensionale Räume V. ⟦∗⟧

8.4. *(Adjungierte Abbildungen)* (4 Punkte)

Seien V und W zwei endlich erzeugte euklidische oder unitäre Räume. Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{im}(f) = \ker(f^*)^\perp$. ⟦∗∗⟧

(b) $\ker(f^* \circ f) = \ker(f)$. ⟦∗⟧

(c) $\mathrm{im}(f^* \circ f) = \mathrm{im}(f^*)$. ⟦∗∗⟧

(d) Sei $V = \mathbb{C}^3$, $W = \mathbb{C}^2$ und $f\colon V \to W$ definiert durch ⟦∗⟧

$$f(v) = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 4+2\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix} v.$$

Geben Sie f^* an.