UNIVERSITÄT PADERBORN

Sommersemester 2024
Paderborn, den 04.06.2024

UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

# 9. Übung zur Linearen Algebra 2

**9.1.** *(Generelle Abstandsberechnungen)* (4 Punkte)
Für Vektoren $b, v_1, \ldots, v_r, v'_1, \ldots, v'_s \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Mengen

$$L = b + \mathbb{R}v_1 + \ldots + \mathbb{R}v_r \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad L' = b' + \mathbb{R}v'_1 + \ldots + \mathbb{R}v'_s \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Je nach Lage und Anzahl der Vektoren sind dies Punkte/Geraden/Ebenen/*etc*. Wir interessieren uns für den minimalen Abstand $d(L, L') := \min\{\|w - w'\| : w \in L, w' \in L'\}$ zwischen $L$ und $L'$.

(a) Zeigen Sie mittels Satz 7.4.8: Das lineare Gleichungssystem ⟦∗⟧

$$A^*Au \overset{!}{=} A^*(b' - b), \quad \text{mit} \quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & \ldots & | & | & \ldots & | \\ v_1 & \ldots & v_r & -v'_1 & \ldots & -v'_s \\ | & \ldots & | & | & \ldots & | \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n \times (r+s)},$$

besitzt stets mindestens eine Lösung $u \in \mathbb{R}^{r+s}$ und für jede solche Lösung $u$ gilt $d(L, L') = \|Au - (b' - b)\|$.
(Bemerkung: Diese Aufgabe subsumiert *sämtliche* Abstandsberechnungen, die einem in der analytischen Geometrie im Rahmen der Schule begegnen.)

(b) Berechnen Sie den Abstand der Geraden aus Aufgabe 7.4 (c) mittels der Methode aus (a). (Hinweis: Sie wissen schon, dass der gesuchte Abstand $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ist. Es geht hier primär darum, diese Erkenntnis auch mittels (a) zu reproduzieren.) ⟦∗⟧

**9.2.** *(Euklidische Isometrien)* (4 Punkte)
Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum. Eine Abbildung $f\colon V \to V$ heißt ***Isometrie***, falls sie Abstände erhält (d.h. $\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in V$). Beispielsweise längenerhaltende lineare Abbildungen im Sinne von Aufgabe 8.2 sind Isometrien. Hier sehen wir, dass sich diese Aussage im Wesentlichen umkehrten lässt. Zeigen Sie:

(a) Jede Isometrie $f\colon V \to V$ mit $f(0) = 0$ ist automatisch linear. ⟦∗∗⟧
(Hinweis: Betrachten Sie $\|f(v + \lambda w) - f(v) - \lambda f(w)\|^2$ und benutzen Sie die Polarisationsformel aus Aufgabe 6.2 (b).)

(b) Jede Isometrie $F\colon V \to V$ ist von der Form $F = f(\_) + w$ mit einer linearen Isometrie $f\colon V \to V$ und einem Vektor $w \in V$. ⟦∗⟧

(c) Die komplexe Konjugation $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ erhält Abstände bezüglich des komplexen Absolutbetrages $|z| = \sqrt{\overline{z}z}$, ist jedoch nicht $\mathbb{C}$-linear. ⟦∗⟧

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 12.06.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381

**9.3.** *(Produkte orthogonaler Matrizen)* (4 Punkte)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ orthogonale Matrizen. Begründen Sie zunächst, dass $A$ invertierbar ist. Zeigen Sie dann, dass auch $A^{-1}$ und $AB$ orthogonale Matrizen sind. ⟦∗⟧

(b) Seien $A, B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ gegeben durch ⟦∗⟧

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie welche der Matrizen $AB$, $AC$ und $BC$ orthogonal sind.

**9.4.** *(Beispiele zu orthogonalen Abbildungen)* (4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung definiert durch ⟦∗∗⟧

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{8}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass $f$ bezüglich des Standardskalarprodukt orthogonal ist. (Hinweis: Das kann man direkt anhand der Definition von Orthogonalität nachrechnen. Sie dürfen aber auch *alle* Ergebnisse aus § 7.5 benutzen.)

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $V = \mathbb{R}[X]^{\leq n}$ der Vektorraum aller reellen Polynome von Grad höchstens $n$ ausgestattet mit einem Skalarprodukt wie in Aufgabe 6.1. Sei weiter $D : V \to V$ die aus Aufgabe 3.1 bekannte Abbildung, die $f$ seine formale Ableitung $f'$ zuweist. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $D$ orthogonal ist. ⟦∗⟧