UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 11.06.2024

10. Übung zur Linearen Algebra 2

10.1. *(Beweisen oder widerlegen)* (4 Punkte)
Zu $U = (u_{jk})_{j,k=1}^{3} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ schreibe

$$U' := \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_{21} & 0 & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & 0 & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}, \quad U'' := \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & 0 \end{pmatrix}, \quad D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist U unitär, so auch U'. ⟦∗⟧

(b) Ist U unitär, so auch U''. ⟦∗⟧

(c) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $T^* D_\alpha T = D_{-\alpha}$. ⟦∗∗⟧

10.2. *(Orthogonale Diagonalisierung)* (4 Punkte)
Wir betrachten die reellen 3×3-Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Beweisen Sie, dass A orthogonal diagonalisierbar ist. Zeigen Sie, also dass eine orthogonale Matrix $S \in O_3 \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ existiert, sodass $S^{\mathrm{T}} A S$ eine Diagonalmatrix ist, ohne ein solches S explizit anzugeben. ⟦∗⟧
Hinweis: Wenden Sie eines der Korollare aus § 7.6 an.

(b) Finden Sie eine orthogonale Matrix $S \in O_3 \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, sodass $S^{\mathrm{T}} A S$ eine Diagonalmatrix ist. ⟦∗∗⟧
Hinweis: Finden Sie eine eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, bestehend aus Eigenvektoren von A (siehe Algorithmus 7.6.7).

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 19.06.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
`https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381`

10.3. *(Unitäre Diagonalisierung)* (4 Punkte)

Wir betrachten die komplexe 4×4-Matrix

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5+5\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 6+6\mathrm{i} & 0 & 0 \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & 2+2\mathrm{i} & 2+2\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 0 & 2+2\mathrm{i} & 5+5\mathrm{i} \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{C}).$$

(a) Beweisen Sie, dass A unitär diagonalisierbar ist. Zeigen Sie also, dass eine unitäre Matrix $S \in U_4 \subset M_{4\times4}(\mathbb{C})$ existiert, sodass $\overline{S}^{\mathrm{T}} AS$ eine Diagonalmatrix ist, ohne ein solches S explizit anzugeben. ⟦∗⟧
Hinweis: Wenden Sie eines der Korollare aus § 7.6 an.

(b) Finden Sie eine unitäre Matrix $S \in U_4 \subset M_{4\times4}(\mathbb{C})$, sodass $\overline{S}^{\mathrm{T}} AS$ eine Diagonalmatrix ist. ⟦∗∗∗⟧
Hinweis: Finden Sie eine eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^4$ bestehend aus Eigenvektoren von A (vgl. Algorithmus 7.6.7.).

10.4. *(Simultane unitäre Trigonalisierung)* (4 Zusatzpunkte)

Wir betrachten den unitären Raum $\mathbb{C}^n$ (mit dem Standardskalarprodukt) und Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$. Zeigen Sie, dass es eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt derart, dass U^*AU und U^*BU obere Dreiecksmatrizen sind: ⟦∗∗∗⟧

$$U^*AU = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & * \end{pmatrix}, \quad U^*BU = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & * \end{pmatrix},$$

wobei die durch „∗“ markierten Einträge beliebige komplexe Zahlen darstellen, welche sich auch von anderen durch „∗“ gekennzeichneten Einträgen unterscheiden dürfen.[1]

[1] *Anleitung:* Dank des Fundamentalsatzes der Algebra hat A einen Eigenwert λ. Zeigen Sie $B\,\mathrm{Eig}(A,\lambda) \subseteq \mathrm{Eig}(A,\lambda)$. Begründen Sie, dass $\mathrm{Eig}(A,\lambda) \to \mathrm{Eig}(A,\lambda)$, $v \mapsto Bv$, einen Eigenvektor u_1 besitzt. O.B.d.A. sei dieser normiert. Dank Satz 7.2.7 [Gram–Schmidt] und Satz 7.5.5 gibt es ein unitäres $U_1 = (u_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Überlegen Sie sich, dass die erste Spalte von $U_1^*AU_1$ bzw. $U_1^*BU_1$ jeweils ein Vielfaches des ersten Einheitsvektors ist. Benutzen Sie dies für einen Induktionsbeweis. Für mehr Inspiration, studieren Sie die Beweise der Sätze 6.5.2 und 7.6.14.