UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 18.06.2024

11. Übung zur Linearen Algebra 2

11.1. *(Spektralsatz für normale Matrizen über $\mathbb{C}$)* (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine normale Matrix. Wenden Sie die Aussage aus Aufgabe 10.4 auf das Paar $(A,B) = (A,A^*)$ an und folgern Sie damit, dass es eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, sodass U^*AU eine Diagonalmatrix ist. ⟦∗∗⟧

(Bemerkung: Das liefert einen weiteren Beweis von Satz 7.6.5 im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.)

11.2. *(Bedingte Äquivalenz)* (4 Punkte)

Sei V ein endlich erzeugter unitärer Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$.

(a) Angenommen, es gilt $f^2 = \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: ⟦∗⟧

1. f ist unitär.
2. f ist selbstadjungiert.
3. f ist normal.

(b) Angenommen, es gilt $f^2 = f$. Zeigen Sie, dass f genau dann normal ist, wenn f selbstadjungiert ist. ⟦∗⟧

Hinweis: Spektralsatz für normale Endomorphismen.

11.3. *(Orthogonale Normalform)* (4 Punkte)

Wir betrachten die reelle 4×4-Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von $A + A^{\mathrm{T}}$. ⟦∗∗⟧

(b) Für jeden (nicht-trivialen) Eigenraum $\operatorname{Eig}(A + A^{\mathrm{T}}, \lambda)$ von $A + A^{\mathrm{T}}$: Wählen Sie jeweils einen Eigenvektor $v_\lambda \in \operatorname{Eig}(A + A^{\mathrm{T}}, \lambda)$ und berechnen Sie $\dim(U_\lambda)$ für $U_\lambda := \langle v_\lambda, A^{\mathrm{T}} v_\lambda \rangle$. ⟦∗⟧

(c) Rechnen Sie nach, dass $AU_\lambda \subseteq U_\lambda$ für alle U_λ aus (b) gilt. ⟦∗⟧

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 26.06.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
`https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381`

11.4. *(Orthogonale Endomorphismen und Spiegelungen)* (4 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

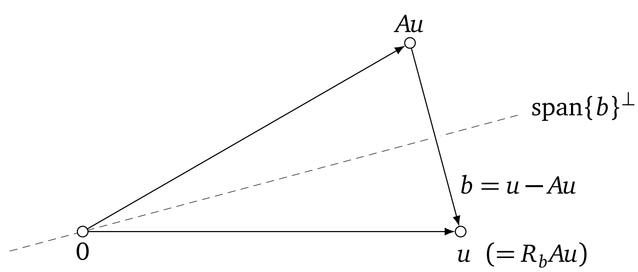
und für $0 \neq b \in \mathbb{R}^3$ die Spiegelungsmatrix

$$R_b := M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(r_b) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ r_b(e_1) & r_b(e_2) & r_b(e_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad r_b(v) := v - 2\frac{\langle b, v\rangle}{\|b\|^2} b,$$

wobei $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichne. Berechnen Sie:

(a) A^*A und $\det(A)$; ⟦∗⟧

(b) $A' = R_b A$ für einen von Null verschiedenen Vektor $b \in \operatorname{im}(E_3 - A)$, den Sie selbst konkret wählen dürfen; ⟦∗∗⟧



(c) $A'' = R_{b'} A'$ für einen von Null verschiedenen Vektor $b' \in \operatorname{im}(E_3 - A')$. ⟦∗⟧

Hinweis: Der ***Satz von Cartan–Dieudonné*** besagt, dass *jedes Element von O_n ein Produkt von höchstens n Spiegelungsmatrizen ist*. In (c) sollten Sie $A'' = E_3$ erhalten, denn für $A \in O_3$ mit $\det(A) = +1$ genügen sogar zwei Spiegelungen. Der Satz von Cartan–Dieudonné lässt sich induktiv beweisen, indem man $A \in O_n$ durch $R_b A$ mit $b \in \operatorname{im}(E_n - A)$ ersetzt und feststellt, dass dies eine orthogonale Matrix mit $\dim \operatorname{Eig}(R_b A, 1) \geq 1 + \dim \operatorname{Eig}(A, 1)$ ist. Nach spätestens n derartigen Ersetzungen entsteht eine $n \times n$-Matrix, deren Eigenraum zum Eigenwert 1 mindestens Dimension n hat. — Das ist dann die Einheitsmatrix.