UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 25.06.2024

12. Übung zur Linearen Algebra 2

12.1. *(Spezialfall des Hauptminorenkriteriums)* (4 Punkte)
Im Folgenden bezeichne $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ stets eine symmetrische 2×2-Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass A genau dann positiv definit ist, wenn die Zahlen a und $\det A = ad - b^2$ *beide* positiv sind. (Hinweis: $v^{\mathrm{T}}Av = \ldots$ und quadratische Ergänzung.) ⟦∗∗⟧

(b) Zeigen Sie, dass A genau dann negativ definit ist, wenn $-A$ positiv definit ist. Formulieren Sie eine Variante des Kriteriums aus (a) für negative Definitheit. ⟦∗⟧

(c) Untersuchen Sie die nachfolgenden Matrizen auf positive/negative Definitheit: ⟦∗⟧

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

12.2. *(Darstellungsmatrix einer symmetrischen Bilinearform)* (4 Punkte)
Sei $\beta : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ die Bilinearform gegeben durch

$$\beta\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}\right) = 2(v_1w_1 - 2v_1w_5 + v_5w_5) + v_3(3w_2 + 7w_3 - w_4) + \\ + w_3(-v_4 + 3v_2) - 4v_5w_1.$$

(a) Finden Sie $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ mit $\beta = \beta_A$. ⟦∗⟧

(b) Ist β symmetrisch? ⟦∗⟧

(c) Berechnen Sie $M_{\mathscr{B}}(\beta)$ für die $\mathbb{R}^5$-Basis ⟦∗⟧

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

12.3. *(Diagonalisierung von symmetrischen Bilinearformen)* (4 Punkte)
Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in K^{n\times n}$ über einem Körper K mit $1_K + 1_K \neq 0_K$.

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 03.07.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
`https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381`

In der Vorlesung wurde ein Verfahren zur Bestimmung einer invertierbaren Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ vorgestellt, sodass $T^{\mathrm{T}}AT$ eine Diagonalmatrix ist; Zur Erinnerung:

	$A=\begin{array}{c}\scriptstyle + \\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}\scriptstyle + \\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{array}=E_2$
$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\;{\scriptstyle +}$	$\begin{array}{c}\scriptstyle \cdot(-1/2)\quad + \\ \begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}\scriptstyle \cdot(-1/2)\quad + \\ \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\end{array}$
$\begin{pmatrix}2&0\\1&-1/2\end{pmatrix}\;{\scriptstyle \cdot(-1/2)\;+}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&-1/2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1/2\\1&1/2\end{pmatrix}$

Leserichtung:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\text{Spaltenumf.}"'] & E_2 \arrow[d, "\text{dieselbe Spaltenumf.}"] \\
\bullet \arrow[r, dashed, "\text{dieselbe Zeilenumf.}"] & \bullet \arrow[dl] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r, dashed] & D & T.
\end{tikzcd}$$

(Hier gilt $T^{\mathrm{T}}AT = D$.)

Im Folgenden sei stets $K=\mathbb{R}$. Finden Sie T und D wie oben für die folgenden A's. ⟦∗∗⟧

$$\text{(a)}\ A=\begin{pmatrix}-2&4&0&-6\\4&-8&2&16\\0&2&1&0\\-6&16&0&-12\end{pmatrix},\qquad \text{(b)}\ A=\begin{pmatrix}-1&3&-2&0\\3&-8&5&2\\-2&5&-3&0\\0&2&0&4\end{pmatrix}.$$

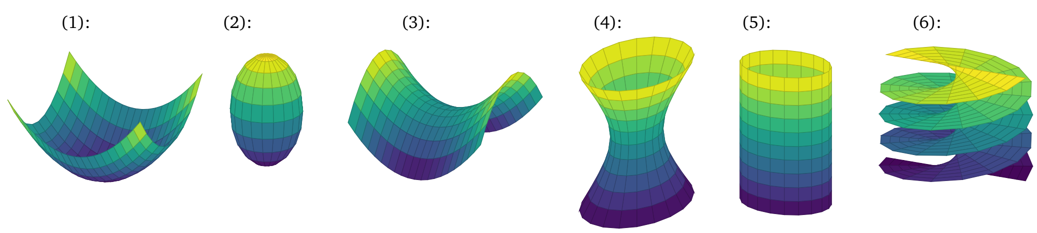
12.4. *(Quadriken und die Hauptachsentransformation)* (4 Punkte)
Studieren Sie Beispiel 7.7.32 im Skript. Betrachten Sie anschließend die quadratische Form

$$q\colon\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\\ v\mapsto v^{\mathrm{T}}Av=v_1^2-2v_1v_2+v_2^2-2v_2v_3+v_3^2,\end{cases}\quad \text{mit}\quad A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie eine orthogonale Matrix $U\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass U^*AU eine Diagonalmatrix ist. ⟦∗∗⟧
(Hinweis: $X^3-3X^2+X+1=(X^2-2X-1)(X-1)$.)

(b) Berechnen Sie $q(Uw)$ für $w\in\mathbb{R}^3$. ⟦∗⟧

(c) Welche der folgenden Skizzen zeigt $\mathcal{Q}^U := \{\, w\in\mathbb{R}^3 : q(Uw)=1\,\}$? ⟦∗∗⟧
Begründen Sie Ihre Antwort!



(d) Wie sieht die Menge $\mathcal{Q} := \{\, v\in\mathbb{R}^3 : q(v)=1\,\}$ aus? ⟦∗⟧
(Hinweis: Es ist *nicht* gefordert, die Lage von $\mathcal{Q}$ im Raum *exakt* anzugeben, aber Sie sollten das Aussehen von $\mathcal{Q}$ sinnvoll beschreiben und eine plausible Begründung für Ihre Beschreibung liefern.)