UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 02.07.2024

13. Übung zur Linearen Algebra 2

13.1. *(Definitheitstest)* (4 Punkte)

(a) Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $S \in \mathrm{GL}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass A genau dann positiv (semi)definit ist, wenn $S^T AS$ positiv (semi)definit ist. ⟦∗⟧

(b) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch mit Signatur (r,s,t). Zeigen Sie: A ist ⟦∗⟧

$$\left.\begin{array}{l}\text{positiv definit}\\ \text{positiv semidefinit}\\ \text{negativ definit}\\ \text{negativ semidefinit}\\ \text{indefinit}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases}(r,s,t)=(n,0,0),\\ s=0,\\ (r,s,t)=(0,n,0),\\ r=0,\\ r\geq 1 \text{ und } s\geq 1.\end{cases}$$

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Bestimmen Sie die Signatur von ⟦∗⟧

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von a und b.

13.2. *(Jordan-Normalform)* (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die folgende Matrix A auf Jordan-Normalform transformiert werden:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie $\ker((A-\lambda E_3)^i)$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ und alle $i \in \mathbb{N}$. ⟦∗∗⟧
(Hinweis: Wenn λ kein Eigenwert von A ist, fällt die Antwort sehr einfach aus.)

(b) Bestimmen Sie einen (von Ihnen gewählten) Vektor $b \in \ker((A-E_3)^2) \setminus \ker(A-E_3)$. ⟦∗⟧

(c) Geben Sie einen (von Ihnen gewählten) Vektor $b' \in \ker(A-2E_3) \setminus \{0\}$ an. ⟦∗⟧

(d) Verifizieren Sie für Ihre Lösung aus (b) und (c), dass $((A-E_3)b, b, b')$ eine Basis des $\mathbb{Q}^3$ bildet und berechnen Sie anschließend $S^{-1}AS$, wenn S die Matrix mit den Spalten $(A-E_3)b$, b und b' ist. ⟦∗∗⟧

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 10.07.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
`https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381`

13.3. *(Nilpotente Matrizen)* (4 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}.$$

(a) Berechnen Sie $U_i := \ker(N^i)$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$. ⟦∗⟧

(b) Zeigen Sie $U_i \subseteq U_{i+1}$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$ und bestimmen Sie jeweils einen Unterraum $W_{i+1} \subseteq \mathbb{R}^6$ mit $U_{i+1} = U_i \oplus W_{i+1}$. ⟦∗⟧

13.4. *(Cayley–Hamilton)* (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $p = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i \in K[t]$ ein Polynom. Für eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ definieren wir die Matrix $p(A) \in M_{n\times n}(K)$ durch

$$p(A) := \sum_{i=0}^{n} c_i A^i.$$

Dann besagt der ***Satz von Cayley–Hamilton***, dass $\chi_A(A) = 0$ für alle $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt.

(a) Beweisen Sie den Satz von Cayley–Hamilton für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. ⟦∗⟧

(b) Sei $B = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 2 \\ 1 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. ⟦∗∗⟧

Berechnen Sie mit dem Satz von Cayley–Hamilton B^5 sowie B^{26}.