Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 09.07.2024

14. Übung zur Linearen Algebra 2

14.1. *(Jordan-Normalform)* (4 Zusatzpunkte)

Angenommen, Sie haben eine 4×4-Matrix A über $\mathbb{C}$ und wissen über diese, dass ihre Eigenwerte genau 5 und 6 sind. Ferner wissen Sie, dass $\dim\ker((5E_4 - A)^2) = 3$ gilt.

(a) Zu welchen der folgenden Matrizen in Jordan-Normalform kann A *nicht* ähnlich sein: ⟦∗∗⟧

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}?$$

(b) Gibt es noch weitere Matrizen in Jordan-Normalform, zu welchen A ähnlich sein kann? Falls ja, geben Sie diese alle an! ⟦∗⟧

14.2. *(Rechenbeispiel)* (4 Zusatzpunkte)

(a) Sei $N \in M_9(\mathbb{C})$ gegeben durch ⟦∗∗⟧

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{7}+3\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\ker(N^i)$ und $\dim\ker(N^i)$ für $i \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $A \in M_7(\mathbb{C})$ die Matrix ⟦∗∗⟧

$$A = \begin{pmatrix} 4-3\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4-3\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-3\mathrm{i} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-3\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3+2\mathrm{i} & \sqrt{3}\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3-2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 17.07.2024, 16:00 Uhr, im zugehörigen PANDA-Kurs ab.
`https://panda.uni-paderborn.de/course/view.php?id=55381`

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 4-3\mathrm{i}$ und $\lambda_2 = 2$. Berechnen Sie $\ker(N^i)$ und $\dim\ker(N^i)$ für $i \in \mathbb{N}$ und $N = A - \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2)$.

14.3. *(Mögliche Jordan-Normalformen)* (4 Zusatzpunkte)

(a) Gegeben sei der folgende Vektor ⟦∗⟧

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Dieser soll die Dimensionen $d_i = \dim\ker(N^i)$, $i = 1, 2, \ldots$, für eine Matrix $N \in M_9(\mathbb{C})$ angeben. Berechnen Sie für $i = 1, 2, \ldots$ die Anzahl r_i der Jordan-Blöcke $J_i(0)$ in der Jordan-Normalform von N. Geben Sie, falls d tatsächlich auf diese Weise entstehen kann, die Jordan-Normalform von N an.

(b) Lösen Sie (a) für $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$. ⟦∗⟧

(c) Sei $A \in M_6(\mathbb{C})$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom ⟦∗∗⟧

$$\chi_A = (X+1)^3(X-3)(X-2-\mathrm{i})^2.$$

Geben Sie bis auf Ähnlichkeit (das heißt, dass die Reihenfolge der Jordan-Blöcke egal ist) alle Matrizen an, die als Jordan-Normalform von A vorkommen können.

14.4. *(A ist ähnlich zu A^{T})* (4 Zusatzpunkte)

(a) Berechnen Sie $P_1^{-1}AP_1$, sowie $P_2^{-1}AP_2$ für ⟦∗⟧

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(b) Sei A eine $n\times n$-Matrix über einem Körper K und χ_f zerfalle in Linearfaktoren. Zeigen Sie, dass A ähnlich zu A^{T} ist, d.h. zeigen Sie, dass es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n\times n}$ mit $S^{-1}AS = A^{\mathrm{T}}$ gibt. (Hinweis: Jordan-Normalform.) ⟦∗∗⟧