UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 29.05.2024

1. Zusatzblatt zur Linearen Algebra 2

T1.1. *(Adjungierte Abbildungen)*
Wir betrachten den $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jeweils deren adjungierte Abbildung f^*:

(a) $f(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} v$;

(b) $f(v) = v - 2\langle b, v\rangle b$ mit $b = (1,1,3)/\sqrt{11}$;

(c) $f(v) = v \times b$ mit $b = (2,1,-1)$;

(d) $f = p_U$, die orthogonale Projektion auf den Unterraum $U = \operatorname{span}\{(1,1,0),(3,5,7)\}$.

T1.2. *(Adjungierte Abbildungen, II)*
Wir statten $\mathbb{R}^2$ mit dem durch $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle_\sim := x_1y_1 + 4x_2y_2$ definierten Skalarprodukt aus und betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Ferner sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto \tilde{A}v$, gegeben durch die Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\mathscr{B}$ des $\mathbb{R}^2$ und eine Orthonormalbasis $\mathscr{C}$ des $\mathbb{R}^3$ bezüglich der oben genannten Skalarprodukte.

(b) Wie geht die Matrix $A := M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ aus der Matrix $\tilde{A}$ gemäß der Transformationsformel hervor (Satz 4.3.18 aus der Linearen Algebra I). Berechnen Sie A.

(c) Bestimmen Sie die zu f adjungierte Abbildung $f^*\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit zwei Methoden:

(1) In dem Sie durch eine formale Rechnung feststellen, welche Werte man für $*$ eintragen muss, um die folgende Gleichung zu erfüllen:

$$\left\langle \tilde{A}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle \stackrel{!}{=} \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle_\sim .$$

(2) Indem Sie mittels der aus dem Beweis von Satz 7.4.3 bzw. von Korollar 7.4.4 bekannten Tatsache $M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^*) = \overline{A}^{\mathrm{T}}$ und der Transformationsformel arbeiten.

T1.3. *(Lineare Regression)*

Im Folgenden sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $Ax \stackrel{!}{=} b$ *keine* Lösung besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Matrix A^*.

(c) Bestimmen Sie die Matrix A^*A und den Vektor A^*b.

(d) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A^*Ax \stackrel{!}{=} A^*b$.

(e) Zeichnen Sie die vier Punkte $(t,z) \in \{(1,1), (2,-1), (3,3), (4,3)\}$ in ein Koordinatensystem. (Bemerkung: t durchläuft hier die zweite Spalte von A und z den zugehörigen Eintrag in b.)

(f) Für einen Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ betrachte die Funktion $f_v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto v_1 + v_2 t$. Zeichnen Sie den Graphen von f_x mit x aus (d) in Ihr Koordinatensystem aus (e).

(g) Gemäß Satz 7.4.8 gilt für x aus (d) die Ungleichung $\|Ax - b\|^2 \le \|Av - b\|^2$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Was bedeutet diese Ungleichung für f_x und f_v?
(Hinweis: $\sum_{(t,z)} \|f_x(t) - z\|^2$ mit (t,z) aus (e).)