UNIVERSITÄT PADERBORN
Sommersemester 2024
Paderborn, den 05.06.2024

UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

2. Zusatzblatt zur Linearen Algebra 2

T2.1. *(Adjungierte Abbildungen, II)*
Betrachten Sie die linearen Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aus Aufgabe T1.1:

(a) $f(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} v$;

(b) $f(v) = v - 2\langle b, v\rangle b$ mit $b = (1,1,3)/\sqrt{11}$;

(c) $f(v) = v \times b$ mit $b = (2,1,-1)$;

(d) $f = p_U$, die orthogonale Projektion auf den Unterraum $U = \operatorname{span}\{(1,1,0),(3,5,7)\}$.

Welche davon sind selbstadjungiert, normal, bzw. orthogonal?

T2.2. *(Abstandsberechnungen)*
Wir betrachten die Gerade $L = b + \mathbb{R}v = (0,-2,0) + \mathbb{R}(1,1,0) \subset \mathbb{R}^3$ und den Punkt $a = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie den Abstand $d(a,L)$ mittels elementargeometrischen Überlegungen.

(b) Aus Aufgabe 6.3 (c) kennen Sie die Formel

$$d(a', b' + \mathbb{R}v') = \frac{|\langle n, a' - b'\rangle|}{\|n\|}$$

zwischen einem Punkt $a' \in \mathbb{R}^2$ und einer Geraden $b' + \mathbb{R}v' \subset \mathbb{R}^2$, wobei $n \in \mathbb{R}^2$ einen Vektor $\neq 0$ mit $n \perp v'$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass sich diese Formel nicht unbedingt wörtlich ins Dreidimensionale überträgt, indem Sie einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$, $n \neq 0$, mit $n \perp (1,1,0)$ und

$$d(a,L) \neq \frac{|\langle n, a - b\rangle|}{\|n\|}$$

finden.

(c) Verifizieren Sie die merkwürdige Formel $d(a,L) = \frac{|\langle n, a-b\rangle|}{\|n\|}$ für $n = v \times (v \times (a-b))$ am vorliegenden Zahlenbeispiel. Geben Sie eine anschauliche Begründung für die Richtigkeit dieser Formel.

(d) Zeigen Sie mittels Satz 7.4.8:

$$\{\, u \in L : \forall u' \in L\colon \|a-u\| \leq \|a-u'\| \,\} = \{\, b + Ax : x \in \mathbb{R},\, A^*Ax = A^*(a-b) \,\}$$

für $A = (v) = \mathbb{R}^{3\times 1}$.

(e) Berechnen Sie A^*A, $A^*(a-b)$ und lösen Sie $A^*Ax \stackrel{!}{=} A^*(a-b)$.

(f) Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus (e), um Ihre Antwort auf (a) zu verifizieren.

T2.3. *(Unitäre Matrizen)*
Bei A und B handle es sich im Folgenden um unitäre $n\times n$-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass AB auch unitär ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ unitär ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Matrix $C = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ nicht unitär ist.

(e) Ist die Matrix AC unitär? Wie sieht es mit CA aus? Muss man die fraglichen Matrizen dazu wirklich ausrechnen?