UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 12.06.2024

3. Zusatzblatt zur Linearen Algebra 2

T3.1. *(Orthogonale Diagonalisierung)*
Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie:

(a) das charakteristische Polynom χ_A von A;

(b) die Eigenwerte λ von A;

(c) $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ für jeden Eigenwert λ von A;

(d) eine invertierbare Matrix T, sodass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist;

(e) eine orthogonale Matrix U, sodass U^*AU eine Diagonalmatrix ist.

T3.2. *(Orthogonale Matrizen)*

(a) Bestimmen Sie alle orthogonalen Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(b) Betrachten Sie eine nicht-triviale Drehung $D \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ um den Nullpunkt im $\mathbb{R}^2$ (um einen Winkel ihrer Wahl). Finden Sie durch elmentar-geometrische Überlegungen eine Spiegelung $S \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ derart, dass $S \circ D$ einen Vektor $\neq 0$ fixiert.

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass jede Drehung $D \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ sich als Verkettung von zwei Spiegelungen $S_1, S_2 \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ schreiben lässt: $D = S_2 \circ S_1$.

T3.3. *(Schreibübung)*

Betrachten Sie das folgende Lemma:

> **Lemma 7.6.4.** *Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ normal. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt* $\mathrm{Eig}(f,\lambda) = \mathrm{Eig}(f^*,\overline{\lambda})$.

Die folgenden Textausschnitte sollen „Beweise“ des obigen Lemmas darstellen, sind aber potentiell fehlerhaft und leiden an schlechter mathematischer Darstellung. Spielen Sie Korrektor*in. Finden Sie Fehler und üben Sie konstruktive Kritik. Was ist falsch? Welcher Argumente lassen sich retten? Wie ließe sich die Darstellung verbessern. Wie viele Punkte (auf einer Skala von Null bis Vier) würden Sie auf die jeweiligen Lösungen geben?

(a) $\mathrm{Eig}(f,\lambda) = \mathrm{Eig}(f^*,\mu) \quad \mu = \overline{\lambda} \quad f = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad f^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$

$$\chi_f = \det\left(X E_n - \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & - & a_{nn} \end{pmatrix}\right) = \det\left(X E_n^* - \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}\right) = \overline{\chi}_{f^*}$$

$$\chi_f(\lambda) = 0 = \overline{\chi}_{f^*}(\overline{\lambda}) \qquad \checkmark \qquad \square$$

(b) $\boxed{\underline{\text{z.z.}} \quad \mathrm{Eig}(f,\lambda) = \mathrm{Eig}(f^*,\overline{\lambda}).}$

$\mathcal{B}$: Basis

$\left.\begin{array}{l} A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \\ A^* = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^*) \end{array}\right\}$ Darstellungsmatrix

$$\mathrm{Eig}(f,\lambda) \xleftrightarrow[\varphi_{\mathcal{B}}]{1:1} \mathrm{Eig}(A,\lambda)$$

$$v \longleftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \ldots + a_{nn}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{a_{11}}\,\overline{v_1} + \ldots + \overline{a_{1n}}\,\overline{v_n} \\ \vdots \\ \overline{a_{n1}}\,\overline{v_1} + \ldots + \overline{a_{nn}}\,\overline{v_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix} = \overline{\lambda} \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix} \qquad \text{q.e.d.}$$

(c) Für $v \in \mathrm{Eig}(f,\lambda)$

$$\begin{aligned}
\| f^*(v) - \overline{\lambda} v \|^2 &= \langle f^*(v) - \overline{\lambda} v, f^*(v) - \overline{\lambda} v \rangle \\
&= \langle f^*(v), f^*(v) \rangle - \langle f^*(v), \overline{\lambda} v \rangle - \langle \overline{\lambda} v, f^*(v) \rangle + \langle \overline{\lambda} v, \overline{\lambda} v \rangle \\
&= \langle v, f(f^*(v)) \rangle - \overline{\lambda} \langle v, f(v) \rangle - \lambda \langle f(v), v \rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle v, v \rangle \\
&= \langle v, f^*(f(v)) \rangle - \overline{\lambda} \langle v, \lambda v \rangle - \lambda \langle \lambda v, v \rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle v, v \rangle \\
&= \langle v, f^*(\lambda v) \rangle - \overline{\lambda} \langle v, \lambda v \rangle - \lambda \langle \lambda v, v \rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle v, v \rangle \\
&= \langle f(v), \lambda v \rangle - \overline{\lambda} \langle v, \lambda v \rangle - \lambda \langle \lambda v, v \rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle v, v \rangle \\
&= \cancel{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} \cancel{- \overline{\lambda} \langle v, \lambda v \rangle} \cancel{- \lambda \langle \lambda v, v \rangle} \cancel{+ \lambda\overline{\lambda} \langle v, v \rangle} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also gilt $v \in \mathrm{Eig}(f^*,\overline{\lambda})$. Analog zeigt man $w \in \mathrm{Eig}(f^*,\overline{\lambda}) \Rightarrow w \in \mathrm{Eig}(f,\lambda)$. Somit zeigt sich $\mathrm{Eig}(f,\lambda) = \mathrm{Eig}(f^*,\overline{\lambda})$.