UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 19.06.2024

4. Zusatzblatt zur Linearen Algebra 2

T4.1. *(Bilinearformen und ihre Darstellungsmatrizen, I)*
Betrachten Sie die Bilinearform

$$\beta\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto v_1 w_2 + v_2 w_1.$$

(a) Berechnen Sie $e_i^{\mathrm{T}} A e_j$ für $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ und die Standardeinheitsvektoren $e_i, e_j \in \mathbb{R}^2$.

(b) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\beta(v,w) = v^{\mathrm{T}} A w$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$.

(c) Untersuchen Sie, ob die Bilinearform β *symmetrisch* ist (d.h. $\beta(v,w) = \beta(w,v)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$). Wie hängt diese Eigenschaft mit A zusammen?

(d) Betrachten Sie die Basis $\mathscr{B} = (b_1, b_2)$, bestehend aus $b_1 = (1,-1)$ und $b_2 = (1,1)$. Sei $\varphi_{\mathscr{B}}$ der bekannte $\mathscr{B}$ zugeordnete Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. Bestimmen Sie

$$\beta' := \beta \circ (\varphi_{\mathscr{B}} \times \varphi_{\mathscr{B}}) = \beta(\varphi_{\mathscr{B}}(\_), \varphi_{\mathscr{B}}(\_))$$

und finden Sie eine Matrix $A' \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\beta'(u,z) = u^{\mathrm{T}} A' z$ für alle $u, z \in \mathbb{R}^2$.

(e) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus (d). Was fällt Ihnen auf?

(f) Versuchen Sie, Ihre Beobachtung aus (e) auch theoretisch zu rechtfertigen.

T4.2. *(Bilinearformen und ihre Darstellungsmatrizen, II)*
Betrachten Sie die Bilinearform

$$\beta\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto v_1 w_1 + 2 v_1 w_2 + 2 v_2 w_1.$$

(a) Berechnen Sie für $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ und Standardeinheitsvektoren $e_i, e_j \in \mathbb{R}^2$.

(b) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\beta(v,w) = v^{\mathrm{T}} A w$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$.

(c) Untersuchen Sie, ob die Bilinearform β symmetrisch ist.

(d) Betrachten Sie die Basis $\mathscr{B} = (b_1, b_2)$, bestehend aus $b_1 = (2,1)$ und $b_2 = (-2,t)$, wobei $t \neq -1$ ein reeller Parameter sei. Sei $\varphi_{\mathscr{B}}$ der bekannte $\mathscr{B}$ zugeordnete Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. Bestimmen Sie

$$\beta' := \beta \circ (\varphi_{\mathscr{B}} \times \varphi_{\mathscr{B}}) = \beta(\varphi_{\mathscr{B}}(\_), \varphi_{\mathscr{B}}(\_))$$

und finden Sie eine Matrix $A' \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\beta'(u,z) = u^{\mathrm{T}} A' z$ für alle $u, z \in \mathbb{R}^2$.

(e) Bestimmen Sie t in (d) so, dass A' eine Diagonalmatrix ist.

(f) Wir schreiben $q' \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \beta'(u,u)$, mit t wie in (e). Bestimmen Sie die Wertemenge $q'(\mathbb{R})$ von q'.

(g) Wir schreiben $q \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \beta(v,v)$. Bestimmen Sie die Wertemenge $q(\mathbb{R})$ von q.

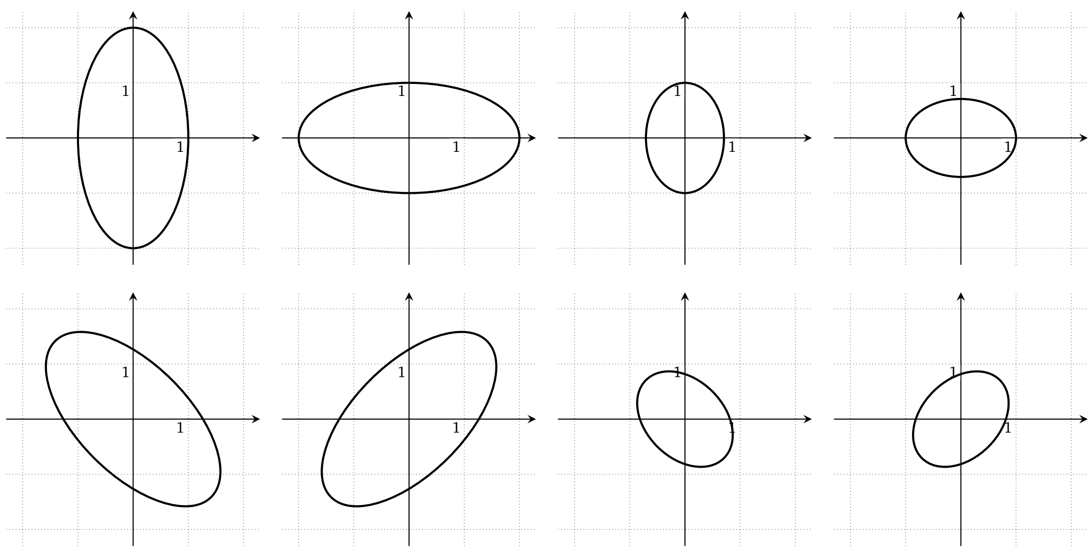
(h) Gibt es eine Basis $\mathscr{B}''$ mit

$$q''(x) = \beta(\varphi_{\mathscr{B}''}(x), \varphi_{\mathscr{B}''}(x)) = x_1^2 + x_2^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$? (Hinweis: Vergleichen Sie Wertemengen.)

T4.3. *(Quadriken)*
Das Tupel (x,y) bezeichne stets einen Punkt im $\mathbb{R}^2$. Die Achsen unserer Koordinatensysteme in dieser Aufgabe sind stets so zu beschriften, dass x entlang der horizontal gezeichneten Achse variiert und y entlang der vertikal gezeichneten Achse variiert.

(a) Die Menge $\mathcal{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ ist eine Ellipse. Begründen Sie dies und stellen Sie fest, welche der folgenden acht Abbildungen $\mathcal{Q}$ zeigt:



(b) Ist die Bemerkung zu Beschriftung/Orientierung der Achsen zu Beginn der Aufgabe wichtig für die Antwort in (a)?

(c) Zeichnen Sie die Mengen

$$\mathcal{Q}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1\}, \qquad \mathcal{Q}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\},$$
$$\mathcal{Q}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 + y^2 = 1\}, \qquad \mathcal{Q}_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 - y^2 = 1\}.$$