UNIVERSITÄT PADERBORN
Sommersemester 2024
Paderborn, den 26.06.2024

UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

5. Zusatzblatt zur Linearen Algebra 2

T5.1. *(Bilinearformen diagonalisieren)*
Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in K^{n\times n}$ über einem Körper K mit $1_K + 1_K \neq 0_K$. In der Vorlesung wurde ein Verfahren zur Bestimmung einer invertierbaren Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ vorgestellt, sodass $T^{\mathrm{T}}AT$ eine Diagonalmatrix ist; Zur Erinnerung:

	$+$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$+$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $+$	$\cdot(-1/2)$ $+$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\cdot(-1/2)$ $+$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ $\cdot(-1/2)$ $+$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

Leserichtung:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\text{Spaltenumf.}"'] & E_2 \arrow[d, "\text{dieselbe Spaltenumf.}"] \\ \bullet \arrow[r, dashed, "\text{dieselbe Zeilenumf.}"] & \bullet \arrow[dl] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r, dashed] & D & T\,. \end{tikzcd}$$

(Hier gilt $T^{\mathrm{T}}AT = D$.)

Im Folgenden sei stets $K = \mathbb{R}$. Finden Sie T und D wie oben für die folgenden A's. Bestimmen Sie jeweils auch die assoziierten Bilinearformen β_A und $\beta_{T^{\mathrm{T}}AT} = \beta_D$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

T5.2. *(Definitheitstest)*
Es sei A eine reelle, symmetrische $n\times n$-Matrix.

(a) Wiederholen Sie die Definitsheitsbegriffe für A:
Wann heißt A *positiv/negativ (semi-)definit*? Wann heißt A *indefinit*?

(b) Wiederholen Sie den Begriff der *Signatur* der Bilinearform $\beta_A \colon (x, y) \mapsto x^{\mathrm{T}}Ay$.

(c) Wie hängt die Definitheit von A mit der Signatur von β_A zusammen?

(d) Bestimmen Sie die Signatur von β_A für alle Matrizen A aus Aufgabe T5.1.

(e) Untersuchen Sie A auf Definitheit für alle Matrizen A aus Aufgabe T5.1.

T5.3. *(Quadriken, II)*

Wir beginnen mit einer Wiederholung von quadratischer Ergänzung, welche aus der Schule wohl bekannt sein sollte.

(a) Finden Sie $u, r \in \mathbb{R}$ mit $X^2 - 2X - 3 = (X - u)^2 - r$.

(b) Wie unterscheidet sich der Graph von $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ von dem von $\tilde{x} \mapsto \tilde{x}^2 - r$ in (a)?

(c) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, bestimmen Sie $u, r \in \mathbb{R}$ mit $aX^2 + bX + c = a(X - u)^2 - r$.

(d) (***Mitternachtsformel***:) Folgern Sie aus (b): für $x \in \mathbb{C}$ ist

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Im Folgenden betrachten wir die zu der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ assoziierte Bilinearform $\beta_A \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^{\mathrm{T}} A y$, sowie die Menge

$$\mathcal{Q} := \{\, x \in \mathbb{R}^2 : \beta_A(x, x) - \langle x, z \rangle = -3 \,\}, \quad \text{mit} \quad z = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Unser Ziel ist es, die Gestalt von $\mathcal{Q}$ möglichst genau zu verstehen.

(e) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von A.

(f) Finden Sie eine orthogonale Matrix U mit $U^* A U = D := \operatorname{diag}(3, 1)$.

(g) Für $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, bringen Sie den Ausdruck $\beta_A(Uv, Uv) - \langle Uv, z \rangle$ in die Form $(v_1 - u)^2 + (v_2 - \tilde{u})^2 - r$ mit geeigneten $u, \tilde{u}, r \in \mathbb{R}$.

(h) Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{Q}^U := \{\, v \in \mathbb{R}^2 : Uv \in \mathcal{Q} \,\}$.

(i) Beschreiben Sie, wie sich $\mathcal{Q}$ von $\mathcal{Q}^U$ unterscheidet und skizzieren Sie $\mathcal{Q}$.