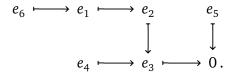


UNIVERSITÄT PADERBORN INSTITUT FÜR MATHEMATIK Marc Technau Charly Schwabe

## 6. Zusatzblatt zur Linearen Algebra 2

## **T6.1.** (*Nilpotenz, I*)

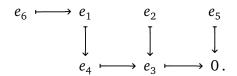
Gegeben sei die Matrix  $N \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ , deren zugeordnete lineare Abbildung  $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ ,  $v \mapsto Nv$ , die Standardeinheitsvektoren  $e_1, \dots, e_6$  wie folgt abbildet:



- (a) Bestimmen Sie N.
- (b) Bestimmen Sie  $N^i$  für i=2,3,4,... Für welches  $i_0$  gilt erstmalig  $N^{i_0}$  = Nullmatrix? Wie hängt das mit dem obigen Abbildungsgraphen zusammen?
- (c) Bestimmen Sie eine Basis von  $ker(N^i)$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
- (d) Wählen Sie einen Vektor  $b \in \ker(N^4) \setminus \ker(N^3)$  und verifizieren Sie dann:
  - 1.  $ker(N^4) = ker(N^3) \oplus span\{b\};$
  - 2. Nb ist ein Element von  $ker(N^3) \setminus ker(N^2)$ ;
  - 3.  $ker(N^3) = ker(N^2) \oplus span\{Nb\};$
  - 4.  $N^2b$  ist ein Element von  $ker(N^2) \setminus ker(N)$ ;
  - 5.  $ker(N^2) = ker(N) \oplus span\{N^2b\};$
  - 6.  $N^3b$  ist ein Element von  $ker(N) \setminus ker(N^0)$ ;
  - 7.  $\ker(N^2) \supseteq \ker(N^0) \oplus \operatorname{span}\{N^3b\};$
- (e) Ergänzen Sie  $N^3b$  zu einer Basis  $(N^3b, b', b'')$  von ker N.
- (f) Sei S die Matrix mit den Spalten  $(N^3b, N^2b, Nb, b, b', b'')$ . Berechnen Sie  $S^{-1}NS$ .

## **T6.2.** (Nilpotenz, II)

Gegeben sei die Matrix  $N \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ , deren zugeordnete lineare Abbildung  $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ ,  $v \mapsto Nv$ , die Standardeinheitsvektoren  $e_1, \dots, e_6$  wie folgt abbildet:



Lösen Sie die Aufgaben aus Aufgabe T6.1 für dieses N. Sind dieses N und das N aus Aufgabe T6.1 ähnlich zueinander?

## **T6.3.** (Hauptraumzerlegung)

Bestimmen Sie für die folgenden  $n \times n$  Matrizen A über dem Körper K deren Eigenwerte  $\lambda$  und alle Haupträume

$$\operatorname{Hau}(A,\lambda) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \ker((\lambda E_n - A)^i).$$

Prüfen Sie außerdem, ob

$$K^n = \bigoplus_{\lambda} \operatorname{Hau}(A, \lambda)$$

gilt.

(a) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$
, (b)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , (c)  $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , (d)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , (e)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ , (f)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ , (g)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ .