UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Charly Schwabe

Sommersemester 2024
Paderborn, den 03.07.2024

6. Zusatzblatt zur Linearen Algebra 2

T6.1. *(Nilpotenz, I)*
Gegeben sei die Matrix $N \in \mathbb{R}^{6\times 6}$, deren zugeordnete lineare Abbildung $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$, $v \mapsto Nv$, die Standardeinheitsvektoren $e_1, \ldots, e_6$ wie folgt abbildet:

$$\begin{tikzcd} e_6 \arrow[r, mapsto] & e_1 \arrow[r, mapsto] & e_2 \arrow[d, mapsto] & e_5 \arrow[d, mapsto] \\ & e_4 \arrow[r, mapsto] & e_3 \arrow[r, mapsto] & 0\,. \end{tikzcd}$$

(a) Bestimmen Sie N.

(b) Bestimmen Sie N^i für $i = 2, 3, 4, \ldots$. Für welches i_0 gilt erstmalig $N^{i_0} =$ Nullmatrix? Wie hängt das mit dem obigen Abbildungsgraphen zusammen?

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(N^i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(d) Wählen Sie einen Vektor $b \in \ker(N^4) \setminus \ker(N^3)$ und verifizieren Sie dann:
1. $\ker(N^4) = \ker(N^3) \oplus \operatorname{span}\{b\}$;
2. Nb ist ein Element von $\ker(N^3) \setminus \ker(N^2)$;
3. $\ker(N^3) = \ker(N^2) \oplus \operatorname{span}\{Nb\}$;
4. $N^2 b$ ist ein Element von $\ker(N^2) \setminus \ker(N)$;
5. $\ker(N^2) = \ker(N) \oplus \operatorname{span}\{N^2 b\}$;
6. $N^3 b$ ist ein Element von $\ker(N) \setminus \ker(N^0)$;
7. $\ker(N^2) \supsetneq \ker(N^0) \oplus \operatorname{span}\{N^3 b\}$;

(e) Ergänzen Sie $N^3 b$ zu einer Basis $(N^3 b, b', b'')$ von $\ker N$.

(f) Sei S die Matrix mit den Spalten $(N^3 b, N^2 b, Nb, b, b', b'')$. Berechnen Sie $S^{-1}NS$.

T6.2. *(Nilpotenz, II)*
Gegeben sei die Matrix $N \in \mathbb{R}^{6\times 6}$, deren zugeordnete lineare Abbildung $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$, $v \mapsto Nv$, die Standardeinheitsvektoren $e_1, \ldots, e_6$ wie folgt abbildet:

$$\begin{tikzcd} e_6 \arrow[r, mapsto] & e_1 \arrow[d, mapsto] & e_2 \arrow[d, mapsto] & e_5 \arrow[d, mapsto] \\ & e_4 \arrow[r, mapsto] & e_3 \arrow[r, mapsto] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Lösen Sie die Aufgaben aus Aufgabe T6.1 für dieses N.
Sind dieses N und das N aus Aufgabe T6.1 ähnlich zueinander?

T6.3. *(Hauptraumzerlegung)*
Bestimmen Sie für die folgenden $n \times n$ Matrizen A über dem Körper K deren Eigenwerte λ und alle Haupträume

$$\mathrm{Hau}(A, \lambda) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \ker((\lambda E_n - A)^i).$$

Prüfen Sie außerdem, ob

$$K^n = \bigoplus_{\lambda} \mathrm{Hau}(A, \lambda)$$

gilt.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2},$$

$$\text{(f)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad \text{(g)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$