

NICHT-NEGATIVE POLYNOME UND SUMMEN VON QUADRATEN

ZUSAMMENFASSUNG. Wir befassen uns mit der Darstellbarkeit von reellen Polynomen als Summen von Quadraten und ähnlichen Themen. Dafür arbeiten wir die Aufgaben in [1, S. 85–86, E.3] ab, beginnen jedoch mit einer kurzen Besprechung der zahlentheoretischen Vorfahren der in weiterer Folge für Polynome zu besprechenden Ergebnisse.

1. SUMMEN VON QUADRATEN GANZER ZAHLEN

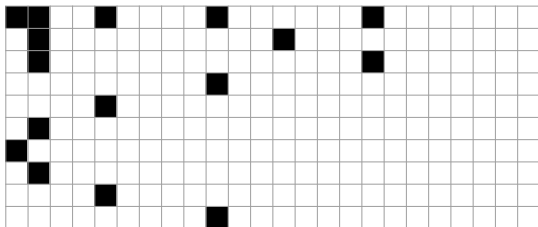
Zur Einstimmung stellen wir die Frage, welche Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ sich als Quadrat einer ganzen Zahl darstellen lassen? Die Antwort darauf ist einfach. Etwa durch $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0, m \mapsto m^2$, erhalten wir eine Parametrisierung eben jener *Quadratzahlen* und durch Einschränkung des Definitionsbereichs auf \mathbb{N}_0 erhalten wir sogar eine injektive Parametrisierung. Die Frage, ob eine gegebene Zahl n eine Quadratzahl ist, oder nicht, lässt sich auch leicht über die Primfaktorzerlegung von n beschreiben. Eine ganze Zahl n ist genau dann eine Quadratzahl, wenn n nicht-negativ ist und in der Primfaktorzerlegung $n = \prod_p p^{v_p(n)}$ von n alle Exponenten $v_p(n)$ gerade sind.

Klassische Sätze der Zahlentheorie klassifizieren nun, welche Zahlen man durch Summenbildung aus den Quadratzahlen erhalten kann. Wir begnügen uns damit, drei Hauptergebnisse in dieser Richtung zu zitieren.

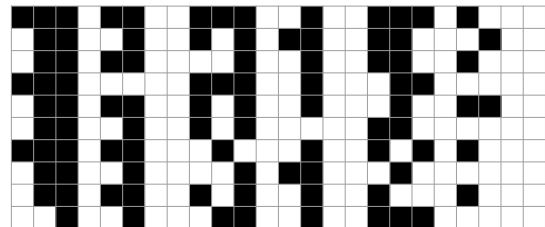
Satz 1.1 (Zweiquadratesatz; Girard, 1625). *Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegung $n = \prod_p p^{v_p(n)}$ ist genau dann als Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen darstellbar, wenn für die Primfaktoren $p \equiv 3 \pmod{4}$ der zugehörige Exponent $v_p(n)$ gerade ist.*

Satz 1.2 (Dreiquadratesatz; Legendre, 1797). *Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegung n ist genau dann als Summe dreier Quadrate ganzer Zahlen darstellbar, wenn n nicht von der Form $n = 4^a(8b + 7)$ mit irgendwelchen $a, b \in \mathbb{N}_0$ ist.*

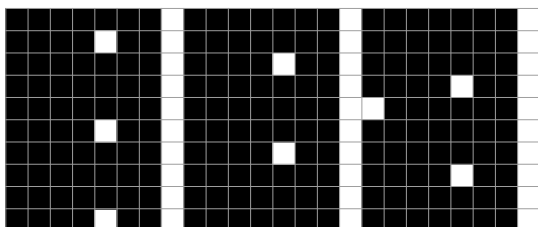
Satz 1.3 (Vierquadratesatz; Lagrange, 1770). *Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen schreiben.*



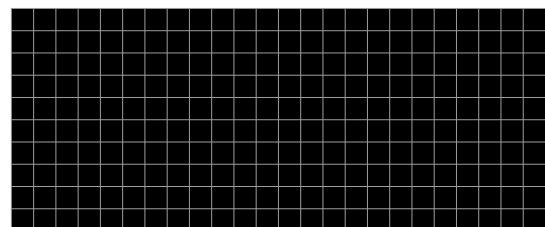
(A) Quadratzahlen < 240 .



(B) Summen < 240 von zwei Quadratzahlen.



(C) Summen < 240 von drei Quadratzahlen.



(D) Summen < 240 von vier Quadratzahlen.

ABBILDUNG 1. Illustration zum Zwei-, Drei-, bzw. Vierquadratesatz. Jedes Quadrat steht für eine ganze Zahl $0 \leq n \leq 240$. Diese Leserichtung ist zeilenweise, dexiographisch, von oben nach unten. Ein Quadrat ist schwarz gefüllt, falls sich die zugehörige Zahl als Summe von genau k Quadratzahlen schreiben lässt ($k = 1, 2, 3, 4$).

Beweise für den Zwei- und Vierquadratesatz findet man bei Hardy und Wright [3, Ch. XX]. Für den Dreiquadratesatz siehe die Notizen am Ende von [3, Ch. XX] und die dortigen Referenzen.

2. NICHT-NEGATIVITÄT AUF \mathbb{R}

Im gesamten Abschnitt handle es sich bei p um ein reelles Polynom mit

$$(2.1) \quad p(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen den folgenden Satz beweisen, welcher als polynomiale Version von Satz 1.1 betrachtet werden kann:¹

Satz 2.1. *Es gibt Polynome $s, t \in \mathbb{R}[X]$ mit $p = s^2 + t^2$.*

Lemma 2.2. *Für $p \neq 0$ gilt*

$$(2.2) \quad p = a \prod_{\alpha} (X - \alpha)^{\nu_{\alpha}} \prod_q q,$$

wobei $a > 0$ der Leitkoeffizient von p ist, α die reellen Nullstellen von p durchläuft, die Exponenten ν_{α} gerade natürliche Zahlen sind und q geeignete normierte, positive, quadratische Polynome durchläuft.

Beweis. Die Darstellung (2.2) (ohne Positivitätsaussage über a und Paritätsaussage für die ν_{α}) erhält man leicht aus dem Zerlegungssatz für reelle Polynome (siehe [4, § 4.2]); Die q s kommen dabei von den Paaren komplex-konjugierter nicht-reeller Nullstellen von p . Für die Positivität des Leitkoeffizienten a von p beachte man, dass sich a auch über den Grenzwert

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{x^{\deg p}}$$

berechnen lässt. Letzterer ist wegen (2.2) nicht-negativ. Der Fall $a = 0$ ist wegen $p \neq 0$ aber ausgeschlossen. Daher gilt $a > 0$.

Nun zur Aussage über die Parität von ν_{α} . Falls p keine reelle Nullstelle hat, ist die Aussage leer und also klar. Daher möge p im Folgenden mindestens eine reelle Nullstelle haben. Für eine reelle Zahl $\xi \neq 0$ schreiben wir $\text{sign } \xi = \pm 1$ mit Vorzeichen \pm je nach Vorzeichen von ξ . Für jedes reelle x , welches keine Nullstelle von p ist, gilt dann nach (2.1) und (2.2)

$$+1 = \text{sign } p(x) = (-1)^{\text{hoch } \sum_{\alpha < x} \nu_{\alpha}}.$$

Wählt man x nun größer als die kleinste reelle Nullstelle α_0 von p , aber kleiner als jene andere reelle Nullstelle von p , so hat die obige Summe nur einen Term, nämlich ν_{α_0} . Daraus sehen wir, dass ν_{α_0} gerade ist. Falls p weitere reelle Nullstellen hat, lässt sich durch geeignetes Vergrößern von x die Summe um weitere Summanden ergänzen und von diesen sehen wir schrittweise deren Geradzahligkeit ein. □

Lemma 2.3. *Satz 2.1 stimmt für normierte p mit $\deg p = 2$.*

Beweis. Für geeignete $b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ist $p = X^2 + bX + c$. Außerdem gilt $b^2 - 4c \leq 0$, denn anderenfalls hätte p zwei paarweise verschiedene reelle Nullstellen und für x zwischen diesen wäre (2.1) verletzt. Quadratische Ergänzung liefert $p = (X + b/2)^2 + c - b^2/4$. Wegen $c - b^2/4 \geq 0$ können wir das als

$$p = (X + b/2)^2 + \sqrt{c - b^2/4}^2$$

schreiben. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Lemma 2.4 (Brahmagupta–Fibonacci-Identität). *Es gilt $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}[X]$.*

Beweis. Das gilt sogar für a, b, c, d aus einem beliebigen kommutativen Ring. Die Identität rechnet man einfach nach. □

Beweis von Satz 2.1. Für $p = 0 = 0^2 + 0^2$ ist der Satz klar. Sei also $p \neq 0$. Zerlege p wie in Lemma 2.2. Die dabei auftretenden Exponenten ν_{α} sind gerade und lassen sich daher in der Form $\nu_{\alpha} = 2\eta_{\alpha}$ für geeignete $\eta_{\alpha} \in \mathbb{N}$ schreiben. Wir erhalten dann die Darstellung $p = (\sqrt{a} \prod_{\alpha} (X - \alpha)^{\eta_{\alpha}})^2 \prod_q q$. Der quadrierte Faktor lässt sich offenbar durch redundante Addition von 0^2 als Summe zweier Quadrate schreiben. Jedes der im Produkt auftretenden q lässt sich gemäß Lemma 2.3 als Summe zweier Quadrate schreiben. Da p aber ein Produkt von Polynomen ist, welche sich alle jeweils als Summe zweier Quadrate schreiben lassen, folgt aus Lemma 2.4 (induktiv), dass sich p auch als Summe zweier Quadrate schreiben lässt. □

¹Man beachte, dass ein Polynom p , welches sich als Summe von Quadraten von Polynomen schreiben lässt, nur nicht-negative Werte annehmen kann und also (2.1) erfüllt. Man gewinnt aus Satz 2.1 also auch sofort eine echte *Charakterisierung* derjenigen Polynome, welche sich als Summe zweier Quadrate schreiben lassen.

3. NICHT-NEGATIVITÄT AUF $\mathbb{R}_{\geq 0}$

Im gesamten Abschnitt handle es sich bei p um ein reelles Polynom mit

$$(3.1) \quad p(x) \geq 0 \quad \text{für alle reellen } x \geq 0.$$

Der folgende Satz kann dann als Ersatz für Satz 2.1 angesehen werden:

Satz 3.1. *Es gibt $s, t, u, v \in \mathbb{R}[X]$ mit $p = s^2 + t^2 + X(u^2 + v^2)$.*

Lemma 3.2. *Die Aussage von Lemma 2.2 bleibt auch richtig, wenn man die Voraussetzung (2.1) zu (3.1) abschwächt und dafür Geradzahligkeit nur für die Exponenten v_α mit $\alpha > 0$ behauptet.*

Der Beweis des Lemmas sollte klar sein, wenn man sich überlegt hat, wie die Voraussetzung (2.1) im Beweis von Lemma 2.2 zum Tragen kommt.

Beweis von Satz 3.1. Wir beweisen die Aussage des Satzes mittels Induktion über die Anzahl n der reellen Nullstellen ≤ 0 der betrachteten Polynome p , wobei die Nullstellen gemäß ihrer Vielfachheiten gezählt werden mögen.

Hat p keine Nullstelle ≤ 0 (Induktionsanfang; $n = 0$), so ergibt sich aus Lemma 3.2, dass p nicht bloß (3.1), sondern sogar (2.1) erfüllt. Dann können wir aber Satz 2.1 anwenden, $p = s^2 + t^2$ (für $s, t \in \mathbb{R}[X]$ geeignet) schreiben, und mit $u = v = 0$ erhalten wir sodann die gewünschte Darstellung $p = s^2 + t^2 + X(u^2 + v^2)$.

Als Induktionsannahme sei nun vorausgesetzt, dass die Aussage von Satz 3.1 für alle Polynome $p \in \mathbb{R}[X]$ mit (3.1) und höchstens n reellen Nullstellen ≤ 0 bereits bewiesen ist.

Wir zeigen nun, dass die Aussage von Satz 3.1 auch noch gilt, wenn p nun $n + 1$ reelle Nullstellen ≤ 0 hat. Sei α_0 eine solche Nullstelle. Dann ist α_0 eines der α in der Darstellung (2.2) aus Lemma 3.2 (siehe Lemma 2.2) und bei

$$\tilde{p} := \frac{p}{X - \alpha_0} = a(X - \alpha_0)^{v_{\alpha_0} - 1} \prod_{\alpha \neq \alpha_0} (X - \alpha)^{v_\alpha} \prod q$$

handelt es sich wieder um ein Polynom. Wegen $x - \alpha_0 \geq 0$ für alle $x \geq 0$ (denn $\alpha_0 \leq 0$) und (3.1) erfüllt auch \tilde{p} (statt p) die Bedingung in (3.1). Nun hat \tilde{p} allerdings $(n + 1) - 1 = n$ Nullstellen ≤ 0 . Nach der Induktionsannahme gibt es also $\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}[X]$ mit $\tilde{p} = \tilde{s}^2 + \tilde{t}^2 + X(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)$. Einsetzen der Definition von \tilde{p} und Umstellen liefert

$$\begin{aligned} p &= (X - \alpha_0)\tilde{p} = (X - \alpha_0)(\tilde{s}^2 + \tilde{t}^2 + X(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)) \\ &= \underline{X^2(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)} + \underline{(-\alpha_0)\tilde{s}^2} + \underline{(-\alpha_0)\tilde{t}^2} + X((-\alpha_0)(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) + \tilde{s}^2 + \tilde{t}^2). \end{aligned}$$

Bei den beiden unterstrichenen Termen handelt es sich nun um nicht-negative Polynome (d.h. diese können die Rolle von p in (2.1) übernehmen). Durch Anwenden von Satz 2.1 auf jene Terme erhält man die im Satz behauptete Darstellung von p . □

4. SATZ VON FEJÉR–RIESZ

In diesem Abschnitt besprechen wir den *Satz von Fejér–Riesz*, welcher — grob gesagt — Aufschluss darüber gibt, wann man aus einem trigonometrischen Polynom eine Wurzel ziehen kann. Was diese Begriffe bedeuten erklären wir gleich. Für den Moment sei nur erwähnt, dass wir den angesprochenen Satz in Abschnitt 5 benutzen werden, um eine Darstellung von auf einem Intervall nicht-negativen Polynom mittels Quadraten zu erhalten.

Unter einem *trigonometrischen Polynom* T verstehen wir eine Funktion $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$(4.1) \quad T(x) = \sum_{n=-N}^N t_n e(nx) \quad (\text{für alle } x \in \mathbb{R}),$$

mit $N \in \mathbb{N}_0$ und komplexen *Koeffizienten* $t_n \in \mathbb{C}$. Dabei schreiben wir $e(\xi)$ für $\exp(2\pi i \xi)$. Wir setzen außerdem $t_n := 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| > N$. Für den Rest des Abschnittes behalten wir diese Bezeichnung bei.

Die Koeffizienten t_n lassen sich aus den Werten von T rekonstruieren:

Lemma 4.1. $t_m = \int_0^1 T(x) e(-mx) dx$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Das folgt aus

$$\int_0^1 e(nx) e(-mx) dx = \int_0^1 \exp(2\pi i(n - m)x) dx = \begin{cases} \int_0^1 1 dx = 1, & \text{falls } m = n, \\ \left. \frac{\exp(2\pi i(n - m)x)}{2\pi i(n - m)x} \right|_{x=0}^1 = 0, & \text{falls } m \neq n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

indem man im zu berechnenden Integral für $T(x)$ die Darstellung (4.1) einsetzt. □

Lemma 4.2. *Ist T reellwertig, so gilt $\overline{t_n} = t_{-n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Das folgt durch Konjugation der Integralformel aus Lemma 4.1 unter Beachtung von $\overline{T(x)} = T(x)$ (wegen $T(x) \in \mathbb{R}$ laut Annahme) und $e(-mx) = e(mx)$. \square

Lemma 4.3. *Ist T symmetrisch (d.h. $T(-x) = T(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), so gilt $t_n = t_{-n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Das folgt nach einer Substitution $x \mapsto 1 - x$ auch aus der Integralformel in Lemma 4.1. \square

Mit diesen Vorbereitungen sind wir nun bereit für das Hauptergebnis dieses Abschnitts:

Satz 4.4 (Fejér–Riesz, 1916). *Für das trigonometrische Polynom T aus (4.1) gelte $T(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es komplexe Zahlen $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ mit*

$$T(x) = \left| \sum_{n=0}^N \alpha_n e(nx) \right|^2.$$

Falls T darüber hinaus auch symmetrisch ist, so kann man die $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ sogar als reelle Zahlen wählen.

Beweis. (Wir folgen Montgomery [5, § 6.3].) Im Fall $T(x) = 0$ (für alle x) ist die Aussage des Satzes trivial (wähle $\alpha_n = 0$ für alle n). Wir dürfen also davon ausgehen, dass T nicht die Nullfunktion ist. Wegen Lemma 4.2 ist t_{-N} genau dann gleich Null, wenn dies auch auf t_N zutrifft. Durch etwaiges Verkleinern von N können wir nun davon ausgehen, dass sowohl t_N , wie auch t_{-N} von Null verschieden sind. Wir stellen zunächst für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$T(x) = Q(e(x)) \quad \text{mit} \quad Q = \sum_{n=-N}^N t_n X^n.$$

fest (beachte (4.1)). Bei

$$P = X^N Q = \sum_{n=-N}^N t_n X^{N+n} = t_{-N} + t_{-N+1}X + \dots + t_N X^{2N}$$

handelt es sich darum um ein Polynom.

Wir betrachten ebenfalls das Polynom

$$P_* := X^{2N} \overline{P(1/\bar{X})} = \overline{t_{-N}} X^{2N} + \overline{t_{-N+1}} X^{2N-1} + \dots + \overline{t_N}.$$

Aus Lemma 4.2 folgt $P_* = P$. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P . Wegen $P(0) = t_{-N} \neq 0$ folgt $z \neq 0$. Nun gilt $0 = P(z) = z^{2N} \overline{P(1/\bar{z})}$. Also ist auch $1/\bar{z}$ eine Nullstelle von P . Wir zeigen, dass sogar die Vielfachheiten dieser Nullstellen übereinstimmen. Sei ν die Vielfachheit der Nullstelle z von P . Dann ist

$$0 = \lim_{x \rightarrow z} \frac{P(x)}{(x-z)^{\nu-1}} = \lim_{x \rightarrow z} \frac{x^{2N} \overline{P(1/\bar{x})}}{(x-z)^{\nu-1}} = z^{2N} \lim_{\xi \rightarrow 1/\bar{z}} \frac{\overline{P(\xi)}}{(1/\xi - z)^{\nu-1}} = z^{2N} \lim_{\xi \rightarrow 1/\bar{z}} \frac{\overline{P(\xi)}(-\xi)^{\nu-1}}{(\xi - 1/\bar{z})^{\nu-1} \bar{z}^{\nu-1}}.$$

Daraus folgt

$$0 = \lim_{\xi \rightarrow 1/\bar{z}} \frac{P(\xi)}{(\xi - 1/\bar{z})^{\nu-1}},$$

weswegen die Nullstelle $1/\bar{z}$ von P mindestens Vielfachheit ν hat. Vertauschen der Rollen von z und $1/\bar{z}$ liefert nun Gleichheit der entsprechenden Vielfachheiten.

Für z mit $1 = |z| = z\bar{z}$ gilt $z = 1/\bar{z}$. Für solche z liefert unsere obige Überlegung also nur eine triviale Aussage. Man kann allerdings zeigen, dass für diese Nullstellen deren Vielfachheit gerade ist. Um sich davon zu überzeugen sei $z = e(x_0)$ eine Nullstelle von P . Es ist

$$(4.2) \quad P(e(x)) = e(Nx)Q(e(x)) = e(Nx)T(x).$$

Umstellen liefert $T(x) = e(-Nx)P(e(x))$. Durch Ableiten erhalten wir

$$(4.3) \quad T'(x) = -2\pi i N e(-Nx)P(e(x)) + e(-Nx)P'(e(x))2\pi i e(x).$$

Setzt man hierin x_0 ein, so verschwindet der erste Summand wegen $P(e(x_0)) = 0$. Wir erhalten also

$$T'(x_0) = e(-Nx)P'(e(x_0))2\pi i e(x_0).$$

Wegen (4.2) hat auch T eine Nullstelle bei x_0 . Wäre nun $T'(x_0) \neq 0$, so erhielte man aus der Taylor-Approximation an T um x_0 , dass T sowohl positive wie auch negative Werte in einer Umgebung seiner Nullstelle x_0 annimmt. Letzteres widerspricht allerdings der Nichtnegativitätsannahme an T . Also gilt $T'(x_0) = 0$ und daraus folgt $P'(e(x_0)) = 0$. Nun iteriert man dieses Argument. Hierfür betrachte man zunächst $T''(x)$, welches eine ähnliche Darstellung wie in (4.3) besitzt, worin aber noch $P''(e(x))$ vorkommt. Beim Auswerten bei x_0 fallen hier alle Terme mit P , und P' weg und wir erhalten $T''(x_0) = \rho P''(e(x_0))$ mit einer geeigneten komplexen Zahl $\rho \neq 0$. Ist nun $T''(x_0) \neq 0$, so sehen wir, dass die Nullstelle $z = e(x_0)$ von P von zweiter, also gerader Ordnung ist. Falls hingegen $T''(x_0) = 0$ gilt, gehen wir zur dritten Ableitung über. Die naheliegende Übertragung unseres vorherigen Arguments mit der Taylor-Approximation

liefert dann $P'''(e(x_0)) = 0$; Die Nullstelle $z = e(x_0)$ von P muss dann also mindestens von vierter Ordnung sein. Durch Iteration dieses Arguments folgt die behauptete Geradzahligkeit der Ordnung der Nullstelle z von P .

Gemäß der obigen Überlegungen können wir die Nullstellen von P in Zweierpärchen $(z, 1/\bar{z})$ einteilen und P wie folgt faktorisieren:

$$P = c \prod_z ((X - z)(\bar{z}X - 1)).$$

Dabei ist c eine geeignete komplexe Zahl und z durchläuft Nullstellen von f mit Betrag ≤ 1 (ggf. mehrfach, damit die Vielfachheiten stimmen). Für $x \in \mathbb{R}$ gilt nun

$$|e(x) - z| = |-e(x)| |\overline{e(x) - z}| = |-e(x)\overline{e(x)} + \bar{z}e(x)| = |\bar{z}e(x) - 1|.$$

Bestimme nun α_n durch Ausmultiplizieren von

$$\sqrt{|c|} \prod_z (e(x) - z) = \sum_{n=0}^N \alpha_n e(nx).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^N \alpha_n e(nx) \right|^2 &= |c| \prod_z |e(x) - z|^2 = |c| \prod_z (|e(x) - z| |\bar{z}e(x) - 1|) = |P(e(x))| \\ &= |e(nx)Q(e(x))| = |e(nx)T(x)| = T(x). \end{aligned}$$

Das zeigt den ersten Teil der Aussage. Ist T nun zusätzlich als symmetrisch angenommen, so erhalten wir aus Lemma 4.3, dass die Koeffizienten t_n alle reell sind. Dann sehen wir, dass für eine Nullstelle z von P auch \bar{z} eine Nullstelle ist, und zwar mit derselben Vielfachheit. Das Polynom

$$\sqrt{|c|} \prod_z (X - z)$$

mit z wie oben hat darum reelle Koeffizienten, wie man sieht, indem man die Faktoren für z und \bar{z} mit einander paart. \square

Der obige Satz wurde erst von Fejér vermutet und in einigen Spezialfällen bewiesen. Der hier geführte Beweis stammt von Frigyes Riesz; siehe [2].

5. NICHT-NEGATIVITÄT AUF $[-1, 1]$

Satz 5.1. Sei p ein reelles Polynom mit $p(x) \geq 0$ für alle $x \in [-1, 1]$. Dann gibt es Polynome $s, t \in \mathbb{R}[X]$ mit $p = s^2 + (1 - X^2)t^2$.

Beweisskizze. Bei $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto p(\cos(2\pi\theta))$, handelt es sich um ein trigonometrisches Polynom (beachte $2 \cos(2\pi\theta) = e(\theta) + e(-\theta)$). Darüber hinaus ist dieses auch gerade (d.h. es gilt $t(\theta) = t(-\theta)$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$). Nach dem Satz von Fejér–Riesz gibt es ein $q \in \mathbb{R}[X]$ mit $t(\theta) = |q(e(\theta))|^2$. Wir schreiben nun $q = \sum_j b_j X^j$ (endliche Summe) und setzen $e(\theta) = \cos(2\pi\theta) + i \sin(2\pi\theta)$ für X ein. Beim Ausmultiplizieren der j -ten Potenzen ergeben sich Summen von Potenzen von $\cos(2\pi\theta)$ und $i \sin(2\pi\theta)$. Für gerade Potenzen schreiben wir

$$(i \sin(2\pi\theta))^{2k} = (-1)^k (1 - \cos(2\pi\theta))^k$$

und für ungerade Potenzen

$$(i \sin(2\pi\theta))^{2k+1} = i(-1)^k (1 - \cos(2\pi\theta))^k \sin(2\pi\theta).$$

Daraus erhalten wir eine Darstellung $q(e(\theta)) = s(\cos(2\pi\theta)) + it(\cos(2\pi\theta)) \sin(2\pi\theta)$ mit geeigneten Polynomen $s, t \in \mathbb{R}[X]$. Es folgt

$$p(\cos(2\pi\theta)) = t(2\pi\theta) = |q(e(\theta))|^2 = s(\cos(2\pi\theta))^2 + (1 - \cos(2\pi\theta))^2 t(\cos(2\pi\theta))^2.$$

Also haben wir $p(x) = s(x)^2 + (1 - x^2)t(x)^2$ für alle $x \in [-1, 1]$. Daraus ergibt sich allerdings, dass das Polynom $p - s^2 - (1 - X^2)t^2$ unendlich viele Nullstellen hat. Also ist es das Nullpolynom und wir haben $p = s^2 + (1 - X^2)t^2$, wie gewünscht. \square

LITERATUR

- [1] P. Borwein und T. Erdélyi. *Polynomials and polynomial inequalities*. New York, NY: Springer, 1995.
- [2] L. Fejér. Über trigonometrische Polynome. *J. reine angew. Math.*, 146(3):53–82, 1916.
- [3] G. H. Hardy und E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford: OUP, 6. Auflage, 2008.
- [4] K. Königsberger. *Analysis I*. Berlin: Springer, 6. Auflage, 2004.
- [5] H. L. Montgomery. *Early Fourier analysis*. Providence, RI: AMS, 2014.