Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 11.10.2024

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Marc Technau
Nicolas Potthast

1. Übung zur Algebra 1

1.1. *(Fingerübungen)* (4 Punkte)
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Gilt $a \circ a = 1$ für alle $a \in G$, so ist G abelsch.

(b) Ist $M = \{\, a \in G : a \circ a \circ a = 1 \,\}$ endlich, so ist $\#M$ ungerade.

1.2. *(Schwache Gruppenaxiome)* (4 Punkte)
Es sei G eine Menge, $\circ\colon G \times G \to G$ eine zweistellige Verknüpfung und $1 \in G$ ein fixiertes Element. Ferner mögen die folgenden Eigenschaften gelten:

$$\begin{cases} (1) & \forall a, b, c \in G\colon \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \\ (2) & \forall a \in G\colon \quad a \circ 1 = a, \\ (3) & \forall a \in G \; \exists b \in G\colon \; a \circ b = 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass G mit $\circ$ eine Gruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage aus Teil (a) i.Allg. nicht gültig bleibt, wenn man (3) durch die folgende Eigenschaft (3') ersetzt:

$$(3')\quad \forall a \in G \; \exists b \in G\colon \; b \circ a = 1.$$

1.3. *(Ordnung von Elementen)* (4 Punkte)
Es sei $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe der reellen, invertierbaren $2{\times}2$-Matrizen zusammen mit der bekannten Matrixmultiplikation als Verknüpfung. Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{sowie} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\#\{\, X^n : n \in \mathbb{N} \,\}$ für alle $X \in \{A, B, AB\}$.

1.4. *(Fingerübungen, II)* (4 Punkte)
Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Es bezeichne $\pi = \prod_{g \in G} g$ das Produkt aller Elemente von G. (Auf die Reihenfolge der Faktoren kommt es hierbei nicht an, da G als abelsch vorausgesetzt wurde.) Zeigen Sie $\pi^2 = 1_G$.

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 18.10.2024, 13:00 Uhr, auf PANDA ab.