UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Nicolas Potthast

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 18.10.2024

2. Übung zur Algebra 1

2.1. *(Untergruppen endlicher Gruppen)* (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: für eine endliche Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Teilmenge U von G genau dann eine Untergruppe von G, wenn 1_G in U enthalten ist und für je zwei Elemente $a, b \in U$ deren Produkt $a \circ b$ in U liegt.

(b) Gilt die Aussage aus Teil (a) auch noch, wenn man von $(G, \circ)$ nicht mehr voraussetzt endlich zu sein? (Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.)

2.2. *(Turmsatz für den Index)* (4 Punkte)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit Untergruppen $V \leq U \leq G$. Ferner seien

$$G = \dot\bigcup_n a_n U, \quad U = \dot\bigcup_m b_m V,$$

disjunkte Zerlegungen von G und U in Linksnebenklassen. (Die Indizes n und m mögen hier jeweils geeignete Indexmengen durchlaufen.) Zeigen Sie:

(a) $G = \dot\bigcup_{n,m} a_n b_m V$.

(b) $[G : V] = [G : U][U : V]$, falls G endlich ist.

2.3. *(Obere Schranke für Erzeuger endlicher Gruppen)* (4 Punkte)

Es sei G eine endliche Gruppe und $M := \{g_1, \dots g_n\}$ eine minimale Menge von Erzeugern von G. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $n \leq \log_2(\#G)$.

(b) Für die Gruppe $V = \mathbb{F}_2^n$ (mit der Vektoraddition als Verknüpfung) gilt in (a) die Gleichheit. Man sagt auch, dass die obere Schranke in (a) scharf ist.

(Hinweis: Verwenden Sie in Teil (a) eine Induktion über geeignete Untergruppen und ihre Nebenklassen. Erinnern Sie sich in Teil (b) an die lineare Algebra und die Definition eines Vektorraums.)

2.4. *(Umkehrung des Satzes von Lagrange)* (4 Punkte)

Betrachten Sie die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_4$ sowie ihre Untergruppe U, die von allen Elementen erzeugt wird, die genau einen Fixpunkt haben. (Das heißt, dass genau ein Element der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ invariant gelassen wird.)

(a) Beweisen Sie, dass $\#U = 12$ gilt.

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 25.10.2024, 13:00 Uhr, auf PANDA ab.

(b) Beweisen Sie, dass U keine Untergruppe der Ordnung 6 hat.
Insbesondere gilt also die Umkehrung des Satzes von Lagrange, dass es zu jedem Teiler der Ordnung einer Gruppe auch eine Untergruppe mit diesem Teiler als Ordnung gibt, im Allgemeinen nicht.

(Hinweis: Zeigen Sie in Teil (a) zunächst, dass jeder der Erzeuger von U ein Produkt zweier Elemente mit genau zwei Fixpunkten ist. Schließen Sie damit, dass die Elemente von $\mathfrak{S}_4$ mit genau zwei Fixpunkten nicht in U enthalten sein können.
Nehmen Sie in Teil (b) an, dass U eine Untergruppe H der Ordnung 6 besitzt, untersuchen Sie die Nebenklassen $u^n H$ für ein Element $u \in U \setminus H$ mit genau einem Fixpunkt (also einen der Erzeuger von U) und bringen Sie dies zum Widerspruch. Die Existenz eines solchen Elements $u \notin H$ ist natürlich zu begründen.)