

3. Übung zur Algebra 1

3.1. (Zyklische Gruppen) (4 Punkte)

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$; (C_n, \oplus) bezeichne die Gruppe aus § 1.2.2. Ferner sei t ein Teiler von n und $\varphi(t)$ bezeichne die Anzahl der natürlichen Zahlen k mit $1 \leq k \leq t$ und $\text{ggT}(t, k) = 1$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Das direkte Produkt $C_n \times C_m$ ist genau dann zyklisch, wenn n und m teilerfremd sind.
 (b) In C_n gibt es genau $\varphi(t)$ Elemente der Ordnung t . (Das ist Satz 1.12 (2).)

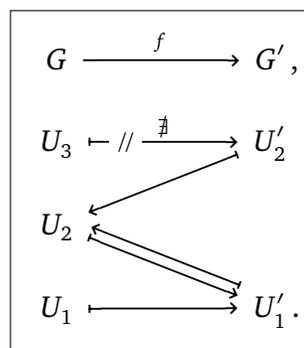
Hinweis: Schlagen Sie Lemma 1.9 und Satz 1.12 (1) im Skript nach. Sie dürfen beide Ergebnisse benutzen. Für die auf $C_n \times C_m$ definierte Gruppenstruktur, siehe § 1.2.4.

3.2. (Untergruppenverbände und Homomorphismen) (4 Punkte)

Bekanntlich induziert jeder Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow G'$ Abbildungen

$$\{\text{Untergruppen } U \text{ von } G\} \begin{array}{c} \xrightarrow{U \mapsto f(U)} \\ \xleftarrow{f^{-1}(U') \leftarrow U'} \end{array} \{\text{Untergruppen } U' \text{ von } G'\}.$$

(Siehe Proposition 2.3 (4).) Finden Sie Gruppen G und G' , sowie einen Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow G'$ derart, dass es Untergruppen $U_1, U_2 \leq G$ und $U'_1, U'_2 \leq G'$ gibt, sodass f das folgende Abbildungsverhalten induziert:



D.h. es soll Folgendes gelten:

- $f(U_1) = U'_1$,
- $f^{-1}(U'_1) = U_2 = f^{-1}(U'_2)$,
- es gibt keine Untergruppe U_3 von G mit $f(U_3) = U'_2$.

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 01.11.2024, 13:00 Uhr, auf PANDA ab.

3.3. *(Mehr zum Komplexprodukt)*

(4 Punkte)

Seien U und V Untergruppen einer Gruppe G . Zeigen Sie:

(a) Die Menge UV ist genau dann eine Untergruppe von G , wenn $UV = VU$ gilt.

(b) Ist U ein Normalteiler von G , so gilt $\langle U \cup V \rangle = UV = VU$.

(c) Sind U und V endlich, so gilt $\#(UV) = \frac{\#U \cdot \#V}{\#(U \cap V)}$.

3.4. *(Einige Automorphismengruppen)*

(4 Punkte)

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Gruppen jeweils eine „bekannte“ Gruppe, zu welcher diese isomorph ist:

(a) $\text{Aut}(C_2)$,

(b) $\text{Aut}(C_4)$,

(c) $\text{Aut}(C_2 \times C_2)$.

Hinweis: Hier gilt $\#\text{Aut}(C_2 \times C_2) > 4 = \#(C_2 \times C_2)$.