UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Nicolas Potthast

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 25.10.2024

3. Übung zur Algebra 1

3.1. *(Zyklische Gruppen)* (4 Punkte)
Es seien $n, m \in \mathbb{N}$; $(C_n, \oplus)$ bezeichne die Gruppe aus § 1.2.2. Ferner sei t ein Teiler von n und $\varphi(t)$ bezeichne die Anzahl der natürlichen Zahlen k mit $1 \leq k \leq t$ und $\mathrm{ggT}(t,k) = 1$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Das direkte Produkt $C_n \times C_m$ ist genau dann zyklisch, wenn n und m teilerfremd sind.

(b) In C_n gibt es genau $\varphi(t)$ Elemente der Ordnung t. (Das ist Satz 1.12 (2).)

Hinweis: Schlagen Sie Lemma 1.9 und Satz 1.12 (1) im Skript nach. Sie dürfen beide Ergebnisse benutzen. Für die auf $C_n \times C_m$ definierte Gruppenstruktur, siehe § 1.2.4.

3.2. *(Untergruppenverbände und Homomorphismen)* (4 Punkte)
Bekanntlich induziert jeder Gruppenhomomorphismus $f\colon G \to G'$ Abbildungen

$$\{\text{Untergruppen } U \text{ von } G\} \underset{f^{-1}(U') \leftarrow\!\shortmid U'}{\overset{U \mapsto f(U)}{\rightleftarrows}} \{\text{Untergruppen } U' \text{ von } G'\}\,.$$

(Siehe Proposition 2.3 (4).) Finden Sie Gruppen G und G', sowie einen Gruppenhomomorphismus $f\colon G \to G'$ derart, dass es Untergruppen $U_1, U_2 \leq G$ und $U_1', U_2' \leq G'$ gibt, sodass f das folgende Abbildungsverhalten induziert:

$$\boxed{\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] & G'\,, \\
U_3 \arrow[r, mapsto, "\nexists", "/" marking] & U_2' \arrow[dl] \\
U_2 \arrow[dr, mapsto, shift left] & \\
U_1 \arrow[r, mapsto] & U_1'\,. \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}}$$

D.h. es soll Folgendes gelten:

- $f(U_1) = U_1'$,
- $f^{-1}(U_1') = U_2 = f^{-1}(U_2')$,
- es gibt keine Untergruppe U_3 von G mit $f(U_3) = U_2'$.

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 01.11.2024, 13:00 Uhr, auf PANDA ab.

3.3. *(Mehr zum Komplexprodukt)* (4 Punkte)

Seien U und V Untergruppen einer Gruppe G. Zeigen Sie:

(a) Die Menge UV ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $UV = VU$ gilt.

(b) Ist U ein Normalteiler von G, so gilt $\langle U \cup V \rangle = UV = VU$.

(c) Sind U und V endlich, so gilt $\#(UV) = \dfrac{\#U \cdot \#V}{\#(U \cap V)}$.

3.4. *(Einige Automorphismengruppen)* (4 Punkte)

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Gruppen jeweils eine „bekannte“ Gruppe, zu welcher diese isomorph ist:

(a) $\mathrm{Aut}(C_2)$,

(b) $\mathrm{Aut}(C_4)$,

(c) $\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2)$.

Hinweis: Hier gilt $\#\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2) > 4 = \#(C_2 \times C_2)$.