UNIVERSITÄT PADERBORN

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 01.11.2024

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Marc Technau
Nicolas Potthast

4. Übung zur Algebra 1

4.1. *(Semidirekte Produkte)* (4 Punkte)
Seien $(G, \bullet)$ und $(H, *)$ Gruppen und $\varphi\colon H \to \operatorname{Aut}(G)$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir betrachten die binäre innere Verknüpfung

$$\star\colon (G \times H) \times (G \times H) \to G \times H, \quad ((g,h),(g',h')) \mapsto (g \bullet \varphi(h)(g'), h * h')$$

auf $G \times H$. Zeigen Sie:

(a) Die *Menge* $G \times H$ bildet zusammen mit $\star$ eine Gruppe, das sogenannte ***semidirekte Produkt von G mit H bezüglich*** $\boldsymbol{\varphi}$. (Man schreibt hierfür $G \rtimes_\varphi H$, um diese vom direkten Produkt $G \times H$ zu unterscheiden, oder kurz $G \rtimes H$, falls der Bezug auf φ klar ist.)

(b) Es sind $G \times \{1_H\} \trianglelefteq G \rtimes H$ und $\{1_G\} \times H \leq G \rtimes H$.

(c) $\{1_G\} \times H \trianglelefteq G \rtimes H$ genau dann wenn $\varphi(h) = \mathrm{id}_G$ für alle $h \in H$ ist, d.h. wenn φ der triviale Homomorphismus $H \to \operatorname{Aut}(G)$ ist.

(d) Ist $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$ mit $N \cap U = \{1_G\}$, so ist $NU \cong N \rtimes_\varphi U$ für $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Aut}(N))$ gegeben durch $\varphi(u) = n \mapsto unu^{-1}$.

4.2. *(Korrespondenzsatz)* (4 Punkte)
Beweisen Sie Satz 2.9: es sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G und $\pi\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$, bezeichne die kanonische Projektion. Dann handelt es sich bei der Abbildung

$$^{\mathrm{a}}\pi\colon \begin{cases} \{\text{Untergruppen } U \leq G/N\} \to \{\text{Untergruppen } V \leq G \text{ mit } V \supseteq N\}, \\ \qquad\qquad U \mapsto \pi^{-1}(U), \end{cases}$$

um eine inklusionserhaltende[1] Bijektion, welche sich zu einer Bijektion

$$\{\text{Normalteiler } U \trianglelefteq G/N\} \xrightarrow{1:1} \{\text{Normalteiler } V \trianglelefteq G \text{ mit } V \supseteq N\}$$

einschränkt.

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 08.11.2024, 13:00 Uhr, auf PANDA ab.

[1] „*Inklusionserhaltend*“ heißt hier: $U \leq U' \leq G/N$ impliziert $^{\mathrm{a}}\pi(U) \subseteq {}^{\mathrm{a}}\pi(U')$.

4.3. *(Auf der Jagd nach einem Beweis)* (4 Punkte)
Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm von Gruppen und Gruppenhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & E' \\
0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und exakten Spalten. Zeigen Sie, dass der darin gezeichnete Gruppenhomomorphismus $C \to C'$ ein Gruppenisomorphismus ist.
(Hinweis: führen Sie Diagrammjagd durch. Beispielsweise zum Nachweis der Injektivität von γ, starten Sie mit einem Element $c \in \ker\gamma \subseteq C$ und zeigen Sie dann $c = 1_C$. Hierzu sollten Sie zeigen, dass sogar $h(c) = 1_D$ gilt und es darum, vermöge Exaktheit, ein $b \in B$ mit $g(b) = c$ gibt. Wenn Sie nun auch noch sehen, dass es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt, so käme $c = g(f(a)) = (g \circ f)(a) = 1_C$ wegen Exaktheit.)

4.4. *(Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches)* (4 Punkte)
Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig mit $a \mid b$. Das ***kleinste gemeinsame Vielfache*** $\mathrm{kgV}(m, n)$ von m und n ist $\mathrm{kgV}(m, n) = \min(m\mathbb{N} \cap n\mathbb{N})$, falls die Menge, deren Minimum auf der rechten Seite betrachtet nicht leer ist und $\mathrm{kgV}(m, n) = 0$ sonst.

(a) Zeigen Sie $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathrm{ggT}(m, n)\mathbb{Z}$ und $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \mathrm{kgV}(m, n)\mathbb{Z}$.

(b) Benutzen Sie Satz 2.12, um $\#(a\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) = b/a$ zu zeigen.

(c) Benutzen Sie Satz 2.11, um $\mathrm{ggT}(m, n)\,\mathrm{kgV}(m, n) = mn$ zu zeigen.