UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Nicolas Potthast

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 08.11.2024

5. Übung zur Algebra 1

5.1. *(Opponierte Gruppen und Rechtsoperationen)* (4 Punkte)
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und M eine beliebige Menge. Zeigen Sie:

(a) Die Menge G bildet zusammen mit der Verknüpfung $\bullet\colon G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto b \circ a$, eine Gruppe. (Diese Gruppe wird zur Abgrenzung von G auch mit G^{op} bezeichnet und heißt die ***opponierte Gruppe zu G***.)

(b) Die identische Abbildung $G^{\mathrm{op}} \to G$, $g \mapsto g$, ist genau dann ein Gruppenisomorphismus zwischen $(G^{\mathrm{op}}, \bullet)$ und $(G, \circ)$ wenn G abelsch ist.

(c) Es gilt $G^{\mathrm{op}} \cong G$ (sogar wenn G nicht abelsch ist).

(d) Übertragen Sie die Überlegungen aus Proposition 2.13, um eine Bijektion zwischen Gruppen-*Rechts*-Operationen $\triangleleft\colon M \times G \to M$ und der Menge $\mathrm{Hom}(G^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sym}(M))$ zu gewinnen.

5.2. *(Projektive lineare Gruppe)* (4 Punkte)
Betrachten Sie den Körper $\mathbb{F}_5$, die lineare Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ der invertierbaren 2×2-Matrizen sowie die Faktorgruppe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)/Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5))$, die als projektive lineare Gruppe bezeichnet wird.

(a) Zeigen Sie $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{F}_5^\times \right\}$ sowie $|\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)| = 120$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ (via Matrixmultiplikation von links) transitiv und treu auf der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5) = \left(\mathbb{F}_5^2 \setminus \{(0,0)\}\right)/\mathbb{F}_5^\times$ operiert.
(Hinweis: In $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ betrachten wir die Vektoren aus $\mathbb{F}_5^2 \setminus \{(0,0)\}$ also nur bis auf skalare Vielfache mit Elementen aus $\mathbb{F}_5^\times$. Die Elemente aus $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ können wir also auch mit den eindimensionalen Untervektorräumen im Vektorraum $\mathbb{F}_5^2$ identifizieren.)

(c) Zeigen Sie $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \cong \mathfrak{S}_5$.
Hierbei dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass es zu jeder Untergruppe H von $\mathfrak{S}_6$ vom Index $[\mathfrak{S}_6 : H] = 6$ einen Automorphismus $\Phi : \mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_6$ gibt, der H isomorph auf die Untergruppe von $\mathfrak{S}_6$ abbildet, deren Elemente alle einen bestimmten Fixpunkt haben.

5.3. *(Struktur von (kleinen) p-Gruppen)* (4 Punkte)
In dieser Aufgabe soll Korollar 2.20 bewiesen werden. G bezeichne eine endliche Gruppe, p sei eine Primzahl und n sei eine natürliche Zahl. Zeigen Sie dann die folgenden Aussagen:

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 15.11.2024, 13:00 Uhr, auf PANDA ab.

(a) Hat G Ordnung p^n, so hat G ein nichttriviales Zentrum: $Z(G) \supsetneq \{1_G\}$.
(Hinweis: benutzen Sie die Klassengleichung, Korollar 2.19.)

(b) Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

(c) Ist $N \leq G$ mit $[G : N] = 2$, so ist $N \trianglelefteq G$.

(d) Hat G Ordnung p^2, so ist G abelsch und es gilt $G \cong C_{p^2}$ oder $G \cong C_p \times C_p$.

5.4. *(Operationen und Symmetrien: Bascetta-Stern, I)* (4 Punkte)
Bei dem unten abgebildeten Objekt handelt es sich um ein von Paolo Bascetta entworfenes modulares Origami-Modell eines Sterns. Es bezeichne G die Gruppe der Drehungen des dreidimensionalen Raumes, welche den Bascetta-Stern $\mathscr{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ invariant lassen, wobei $\mathscr{B}$ als angemessen idealisiert anzusehen ist, sodass Faltungenauigkeiten vernachlässigt werden können.

(a) Falten Sie einen Bascetta-Stern gemäß der im PANDA-Kurs verfügbaren Anleitung.
(Hinweis: Auf einschlägigen Videoplattformen findet man ebenfalls Anleitungen. Es gibt 2 Bonuspunkte für die Gruppe, welche den kleinsten Stern abgibt und 2 Bonuspunkte für die Gruppe, die den größten Stern abgibt. Falls sich keine solche Gruppe eindeutig identifizieren lässt, verfallen die jeweiligen Bonuspunkte. Pro Gruppe darf nur ein Stern abgegeben werden. Bitte, denken Sie bei der Abgabe daran, auf geeignete Weise Ihre Namen kenntlich zu machen, damit Sie die Sterne zu Beginn der Präsenzübungen am 19. und 20. November zurückbekommen können. Die Abgabe des Sterns erfolgt bei Nicolas Potthast bis zum 18. November. — Siehe PANDA für mögliche Zeitfenster.)

Die folgenden Aufgaben werden in den Präsenzübungen besprochen (Aufgabe T6.1) und werden *nicht* bepunktet. Sie können Ihr gebasteltes Modell aber schon zuhause nutzen, um über diese Aufgaben nachzudenken:

(b) Zeigen Sie, dass G treu auf $\mathscr{B}$ operiert und endlich ist.

(c) Bestimmen Sie die Ordnung von G.