UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Nicolas Potthast

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 15.11.2024

6. Übung zur Algebra 1

6.1. *(Färbungen eines Quadrats)* (4 Punkte)
Die Gruppen C_4 und $D_{2\cdot 4}$ operieren auf den Ecken E eines Quadrats durch Drehung bzw. Drehung und Spiegelung (vgl. das Beispiel über Satz 2.16, sowie Aufgabe T5.2).

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Färbungen von E mit drei[1] Farben unter der Operation von C_4.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Färbungen von E mit drei Farben unter der Operation von $D_{2\cdot 4}$.

(c) Geben Sie zwei Färbungen von E mit drei Farben an, welche unter der Operation von C_4 zu verschiedenen Bahnen gehören, aber bezüglich der Operation von $D_{2\cdot 4}$ in derselben Bahn liegen.

6.2. *(Untergruppen von $\mathfrak{S}_5$)* (4 Punkte)

(a) Finden Sie ein Element $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ mit Ordnung 6.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}_5$ kein Element mit Ordnung 15 enthält.
(Hinweis: für $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ operiert die Gruppe $\langle \sigma \rangle$ auf $M = \{1, \dots, 5\}$ durch Funktionsauswertung. Überlegen Sie sich, wie die Ordnung von σ mit den Bahnen zusammenhängt, in welche M unter der genannten Operation zerfällt.)

(c) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}_5$ keine Untergruppe der Ordnung 15 enthält, obwohl 15 ein Teiler von $\#\mathfrak{S}_5 = 5! = 120 = 15 \cdot 8$ ist.
(Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die aus Proposition 3.5 folgende Tatsache benutzen, dass jede Gruppe der Ordnung 15 zyklisch ist.)

6.3. *(Exponentialbewertung)* (4 Punkte)
Es sei p eine Primzahl. Für $n \in \mathbb{Z}$ definiere dann $\nu_p(n) := \sup\{\, \nu \in \mathbb{N}_0 : p^\nu \text{ teilt } n \,\}$. (Für alle $n \neq 0$ darf man „sup“ durch „max“ ersetzen; für $n = 0$ hat man $\nu_p(0) = +\infty$.)

(a) Zeigen Sie: für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$.
(Hinweis: Für $ab = 0$ gilt die obige Gleichung bei richtiger Konventionswahl auch, Sie dürfen sich aber auf den Fall $ab \neq 0$ beschränken. „$\geq$“ ist nicht schwierig. Für die umgekehrte Ungleichung kann man mittels Lemma 3.2 argumentieren.)

(b) Im Beweis von Satz 3.1 kam die folgende Aussage vor (mit Notation wie dort):

> *$G(\mathscr{M}_0)$ sei eine Bahn, deren Länge $\#G(\mathscr{M}_0) = [G : G_{\mathscr{M}_0}] = \#G/\#G_{\mathscr{M}_0}$ nicht durch p^{r+1} geteilt wird. Dann ist p^n ein Teiler von $\#G_{\mathscr{M}_0}$.*

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 22.11.2024, 13:00 Uhr, auf PANDA ab.

[1] Färbungen, bei denen nicht alle drei Farben wirklich benutzt werden, sollen hier ebenfalls gezählt werden.

Benutzen Sie (a), um die oben gemachte Aussage über Teilbarkeit von $\#G_{\mathscr{M}_0}$ durch p^n zu begründen.

6.4. *(Anzahl nicht isomorpher Graphen mit n Knoten)* (4 Punkte)
Ein Graph Γ ist ein Tupel (V, E), wobei V eine Menge von Knoten ist und E eine Menge von Kanten bezeichnet, die zwei Knoten miteinander verbinden können. Wenn die Kanten von Γ zusätzlich ungerichtet sind und es zwischen zwei Knoten keine Mehrfachkanten gibt, ist E eine Teilmenge aller 2-elementigen Teilmengen von V. Zwei ungerichtete Graphen $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ und $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ ohne Mehrfachkanten sind isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $p : V_1 \to V_2$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: $\{v, w\}$ ist genau dann eine Kante von Γ_1, wenn $\{p(v), p(w)\}$ eine Kante von Γ_2 ist.

(a) Es sei nun $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie mit Satz 2.21 (Polya-Redfield) die Anzahl $\mathscr{A}(n)$ nicht isomorpher Graphen mit n Knoten. Die Anzahl der Bahnen der induzierten Operation $\varrho(g)$ muss nur für $g = 1_G$ explizit berechnet werden.

(b) Bestimmen Sie $\mathscr{A}(n)$ für $n \leq 4$ explizit.

(Hinweis: Überlegen Sie sich in Teil (a), wie sich die Operation der $\mathfrak{S}_n$ auf den n Knoten des Graphen auf die Kanten des Graphen überträgt.)