UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Nicolas Potthast

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 22.11.2024

7. Übung zur Algebra 1

7.1. *(Gruppen der Ordnung 324 und Einfachheit)* (∗4 Punkte)
Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe G mit Ordnung $324 = 2^2\,3^4$ gibt.
(Hinweis: falls die Anzahlbetrachtung der Sylowgruppen von G nicht ausreichen, betrachten Sie die Operation von G auf $\mathrm{Syl}_3\, G$ durch Konjugation. Kann diese Operation treu sein?)

7.2. *(Erzeugen von $\mathfrak{S}_n$)* (∗4 Punkte)
Es sei $n \geq 2$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathfrak{S}_n = \langle (1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n) \rangle$;

(b) $\mathfrak{S}_n = \langle (1\,2), (2\,3), (3\,4), \ldots, ((n-1)\,n) \rangle$;

(c) $\mathfrak{S}_n = \langle \sigma, \tau \rangle$ mit $\sigma = (1\,2\,3\,\ldots\,n)$ und $\tau = (1\,2)$;

(d) Ist n prim, so kann man in (c) sogar $\tau = (r\,s)$ mit beliebigen $1 \leq r < s \leq n$ wählen.

(Hinweis: benutzen Sie, dass $\mathfrak{S}_n$ von allen Transpositionen erzeugt wird; Konjugation könnte helfen. Falls Sie noch keine richtige Idee haben, mag es helfen, für $n = 4$ oder $n = 5$ konkrete Rechnungen anzustellen.)

7.3. *(Isomorphe semidirekte Produkte)* (∗4 Punkte)
Es seien $(N, \bullet)$, $(U, *)$ und $(V, \star)$ Gruppen, $\varphi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus sowie $f : V \to U$ ein Gruppenisomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : N \rtimes_{\varphi} U \to N \rtimes_{\varphi \circ f} V, \quad (n, u) \mapsto (n, f^{-1}(u))$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

(b) Betrachten Sie nun die Situation aus Proposition 3.5 (1): Es sei G eine Gruppe der Ordnung $n = pq$ mit Primzahlen p und q mit der Eigenschaft $q \mid (p-1)$. Zeigen Sie, dass es mindestens einen nicht-trivialen Gruppenhomomorphismus $\varphi : C_q \to \mathrm{Aut}(C_p)$ gibt.
(Hinweis: Zeigen Sie $\mathrm{Aut}(C_p) \cong C_{p-1}$.)

(c) Verwenden Sie Teil (a) und (b), um zu beweisen, dass alle nicht-trivialen Gruppenhomomorphismen von C_q nach $\mathrm{Aut}(C_p)$ zueinander isomorphe semidirekte Produkte liefern.

7.4. *(Untergruppen von $\mathfrak{S}_n$)* (∗4 Punkte)
Zeigen Sie für $n \geq 2$, dass A_n die einzige Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$ mit Index 2 ist.

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 29.11.2024, 13:00 Uhr, auf PANDA ab.