UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Nicolas Potthast

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 29.11.2024

8. Übung zur Algebra 1

8.1. *(Normalteiler von $\mathfrak{S}_n$)* (∗4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Normalteiler von $\mathfrak{S}_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.
(Hinweis: für $n \geq 5$ betrachten Sie den Schnitt $N \cap A_n$ eines Normalteilers N von $\mathfrak{S}_n$ mit A_n und benutzen Sie Aufgabe 8.2. Für kleinere n finden Sie die Lösung in § 4.1 der Vorlesungsnotizen. Ihr Beweis sollte sich aber nicht darauf stützen, dass man dort den vollständigen Untergruppenverband von $\mathfrak{S}_3$ oder $\mathfrak{S}_4$ sieht, es sei denn, Sie leiten sich diesen eigenständig her.)

8.2. *(Untergruppen von $\mathfrak{S}_n$)* (∗4 Punkte)

(a) Es sei U eine echte Untergruppe einer endlichen Gruppe G derart, dass U keinen nichttrivialen Normalteiler enthält. Mit G/U sei die Menge der Linksnebenklassen von G bezeichnet. Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Sym}(G/U)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 5$ der Index $[\mathfrak{S}_n : U]$ jeder echten Untergruppe $U \neq A_n$ von $\mathfrak{S}_n$ die Ungleichung $[\mathfrak{S}_n : U] \geq n$ erfüllt.

8.3. *(Ein Zyklizitätskriterium für endliche abelsche Gruppen)* (4 Punkte)
Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass G genau dann zyklisch ist, wenn es für jeden Primteiler p von $\#G$ höchstens $p-1$ Elemente der Ordnung p in G gibt.

8.4. *(Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen)* (4 Punkte)
Für eine abelsche Gruppe H bezeichne $\mathrm{Tor}(H)$ die Menge der Elemente von H mit endlicher Ordnung.

(a) Zeigen Sie, dass für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G ein $k \in \mathbb{N}_0$ und eine endliche abelsche Gruppe $\mathrm{Tor}(G)$ existieren, sodass G zu

$$\mathbb{Z}^k \times \mathrm{Tor}(G)$$

isomorph ist.

(b) Betrachten Sie zwei endlich erzeugte abelsche Gruppen $G := \mathbb{Z}^k \times \mathrm{Tor}(G)$ und $G' := \mathbb{Z}^\ell \times \mathrm{Tor}(G')$ und zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$G \cong G' \quad \Longleftrightarrow \quad k = \ell \text{ und } \mathrm{Tor}(G) \cong \mathrm{Tor}(G').$$

(Hinweis: Betrachten Sie für eine endlich erzeugte abelsche Gruppe G die Menge $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q})$ der Gruppenhomomorphismen von G nach $(\mathbb{Q}, +)$ und überlegen Sie sich,

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 06.12.2024, 13:00 Uhr, auf PANDA ab.

dass $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q})$ durch punktweise Definition eine $\mathbb{Q}$-Vektorraumstruktur trägt. Bestimmen Sie ferner die Dimension dieses $\mathbb{Q}$-Vektorraums.)

(c) Folgern Sie mithilfe von Satz 5.3 den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen:

Satz. *Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G ist isomorph zu einer Gruppe*

$$\mathbb{Z}^k \times C_{q_1} \times C_{q_2} \times \ldots \times C_{q_t}$$

mit $k, t \in \mathbb{N}_0$ und Primzahlpotenzen $q_1, \ldots, q_t > 1$. Dabei sind k, t und die Primzahlpotenzen (bis auf Umnummerierung) durch G eindeutig bestimmt.