Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Marc Technau
Nicolas Potthast

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 13.12.2024

10. Übung zur Algebra 1

10.1. *(Ringe in der Topologie)* (4 Punkte)
Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. (Falls Sie damit nicht vertraut sind, dürfen Sie X durch das Intervall $[0,1]$ ersetzen.) Es sei R der Ring der *stetigen*, reellwertigen Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit punktweise definierter Addition & Multiplikation. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in X$ ist $\mathfrak{m}_x = \{ f \in R : f(x) = 0 \}$ ein maximales Ideal von R.

(b) Haben $f_1, \ldots, f_n \in R$ keine gemeinsame Nullstelle (d.h. es gibt kein $x \in X$ mit $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$), so ist $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = \langle 1 \rangle = R$.

(c) Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R ist von der Form $\mathfrak{m}_x$ für ein $x \in X$.

(d) Die Zuordnung $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ stiftet eine Bijektion zwischen X und der Menge der maximalen Ideale von R. (Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von Urysohn aus der Topologie, falls Sie dieses kennen, oder schränken Sie Ihre Betrachtung hier auf $X = [0,1]$ ein.)

10.2. *(Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$)* (4 Punkte)
Es sei p eine ungerade Primzahl und $\nu \geq 2$. Wir setzen $\lfloor \varrho \rfloor := \max\{ r \in \mathbb{Z} : r \leq \varrho \}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $(1+p)^{p^{\nu-2}} \equiv 1 + p^{\nu-1} \bmod p^\nu$. (Hinweis: Induktion & Binomischer Lehrsatz.)

(b) $1 + p \bmod p^\nu$ hat Ordnung $p^{\nu-1}$ in $(\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})^\times$.

(c) Sind x und y Elemente einer endlichen abelschen Gruppe $(G, \cdot)$ mit teilerfremden Ordnungen, so ist $\operatorname{ord}(xy) = \operatorname{ord}(x)\operatorname{ord}(y)$.

(d) Hat $g \bmod p$ Ordnung $p-1$ in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, so hat $g^{p^{\nu-1}}(1+p) \bmod p^\nu$ Ordnung $p^\nu - p^{\nu-1}$ in $(\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})^\times$.

10.3. *(Primideale, Teil I)* (4 Punkte)
Ein Ideal $\mathfrak{p} \subsetneq R$ eines Ringes R heißt ***Primideal*** (oder ***prim***), falls für alle Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von R aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ schon $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ folgt. Im Folgenden sei R zusätzlich als *kommutativ* vorausgesetzt. Zeigen Sie dann die folgenden Aussagen:

(a) Für jedes Ideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ von R sind die folgenden Aussagen äquivalent:

  (1) $\mathfrak{p}$ ist prim;

  (2) $\mathfrak{p} \neq R$ und $\forall a, b \in R$: $ab \in \mathfrak{p} \Rightarrow (a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p})$;

  (3) $R/\mathfrak{p}$ ist ein Integritätsbereich.

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 23.12.2024, 13:00 Uhr, auf PANDA ab.

(b) Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R ist prim.

(c) Alle Primideale $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ von $\mathbb{Z}$ sind maximal.

10.4. *(Primideale, Teil II)* (4 Punkte)

Es sei $f : R \to S$ Homomorphismus zwischen kommutativen Ringen R und S.

(a) Zeigen Sie: ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von S, so ist das Urbild $f^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal von R.

(b) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass das Urbild $f^{-1}(\mathfrak{m})$ eines maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ von S nicht maximal in R zu sein braucht.