

11. Übung zur Algebra 1

11.1. (Ringe in der Topologie, II) (4 Punkte)

In Fortsetzung von Aufgabe 10.1 betrachten wir den Ring R der stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (Notiz: Im Vergleich zu Aufgabe 10.1 ist der Definitionsbereich hier nicht kompakt.) Zeigen Sie, dass es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von R gibt, welches nicht von der Form $\mathfrak{m}_x = \{f \in R : f(x) = 0\}$ für $x \in \mathbb{R}$ ist.
(Hinweis: Satz 6.12.)

11.2. (Zum Chinesischen Restsatz) (4 Punkte)

Finden Sie einen Ring R mit Idealen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ derart, dass $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 = R$ gilt, aber $R/\bigcap_i \mathfrak{a}_i$ nicht isomorph zu $\prod_i (R/\mathfrak{a}_i)$ ist.

11.3. (Struktur von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$) (4 Punkte)

Es sei $G := (\mathbb{Z}/540\mathbb{Z})^\times$. Wegen $540 = 2^2 3^3 5$, Korollar 6.18 und Satz 6.21 ist $(\mathbb{Z}/540\mathbb{Z})^\times \cong C_2 \times C_{18} \times C_4$. Finden Sie Elemente $a, b, c \in G$ mit $\text{ord}(a) = 2$, $\text{ord}(b) = 18$ und $\text{ord}(c) = 4$ und $\{1_G\} = \langle a \rangle \cap \langle b, c \rangle = \langle b \rangle \cap \langle a, c \rangle = \langle c \rangle \cap \langle a, b \rangle$.

11.4. (Radikal eines Ideals) (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R . Betrachten Sie ferner die Menge $\text{rad}(\mathfrak{a}) := \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } r^n \in \mathfrak{a}\}$, welche als *Radikal von $\mathfrak{a}$* bezeichnet wird.

(a) Zeigen Sie, dass $\text{rad}(\mathfrak{a})$ ein Ideal von R ist.

(b) Zeigen Sie die Gleichheit

$$\text{rad}(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \\ \mathfrak{p} \text{ Primideal}}} \mathfrak{p}.$$

(Hinweis: Betrachten Sie in Teil (b) für die Teilmengeninklusion „ $\supseteq$ “ ein $f \in R \setminus \text{rad}(\mathfrak{a})$ und zeigen Sie die Existenz eines Primideals $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$, welches f nicht enthält. Betrachten Sie zudem die Menge $\mathcal{A}$ aller Ideale, welche $\mathfrak{a}$ enthalten, aber keine Potenz von f enthalten, und verwenden Sie das Lemma von Zorn.)