Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 10.01.2025

UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Nicolas Potthast

12. Übung zur Algebra 1

12.1. *(Universelle Eigenschaft von $R[X]$)* (4 Punkte)

Es sei $i\colon R \to A$ ein Homomorphismus zwischen kommutativen Ringen und $x \in A$ sei fixiert. Ferner gelte die folgende Aussage: *für jeden Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$ in einen kommutativen Ring S und jedes $s \in S$ gibt es genau einen Ringhomomorphismuis $F\colon A \to S$ mit $F(x) = s$, der das folgende Diagramm kommutativ macht:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "\exists!\, F", "x \mapsto s"'] & S . \\ R \arrow[u, "i"] \arrow[ur, bend right, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass A isomorph zum Polynomring $R[X]$ ist.

12.2. *(Polynome und Nullstellen)* (4 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring R und ein Polynom $f \in R[X] \setminus \{0_{R[X]}\}$ an, sodass f unendlich viele verschiedene Nullstellen in R besitzt.
(Hinweis: Sie können beispielsweise Polynomringe und Faktorbildung benutzen, um einen Ring R mit vielen Nullteilern zu konstruieren.)

12.3. *(Lokalisierung)* ($*$4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring. Eine Teilmenge $S \subseteq R$, die die beiden Eigenschaften $1_R \in S$ und $s, s' \in S \Rightarrow ss' \in S$ erfüllt, heißt *multiplikatives System*.

(a) Betrachten Sie das mengentheoretische kartesische Produkt $R \times S$ des Rings mit einem multiplikativem System und zeigen Sie, dass die via

$$(r,s) \sim (r',s') \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists t \in S : (rs' - r's)t = 0_R$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Die Äquivalenzklasse $[(r,s)]_\sim$ von $(r,s) \in R \times S$ bezeichnen wir suggestiv auch mit $\frac{r}{s}$. Auf der Menge $(R \times S)/\sim$ der Äquivalenzklassen definieren wir eine Addition und eine Multiplikation via

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st} \quad \text{und} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}.$$

Zeigen Sie, dass $(R \times S)/\sim$ mit dieser Addition und Multiplikation zu einem kommutativem Ring wird.

Geben Sie Ihre Lösung bitte bis zum 17.01.2025, 13:00 Uhr, auf PANDA ab.

Bemerkung: Diesen Ring nennt man *Lokalisierung von R bei S* und schreibt auch $S^{-1}R$.

(c) Zeigen Sie die universelle Eigenschaft der Lokalisierung:
Die (kanonische) Abbildung $\tau : R \to S^{-1}R, r \mapsto \frac{r}{1}$ von einem Ring R in seine Lokalisierung bei einem multiplikativem System $S \subseteq R$ ist ein Homomorphismus mit der Eigenschaft $\tau(S) \subseteq (S^{-1}R)^{\times}$. Diese Abbildung ist universell in dem Sinne, dass jeder Ringhomomorphismus $\varphi : R \to R'$ mit $\varphi(S) \subseteq R'^{\times}$ eindeutig über $S^{-1}R$ faktorisiert. Das heißt, es existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus $\varphi' : S^{-1}R \to R'$ mit $\varphi = \varphi' \circ \tau$.
Weiterhin gilt: Falls φ dieselbe universelle Eigenschaft wie τ erfüllt, so ist φ' ein Isomorphismus von Ringen.
Bemerkung: Im Spezialfall $S = R \setminus \{0_R\}$ ist die Lokalisierung $S^{-1}R$ ein Körper und wird als *Quotientenkörper* bezeichnet.

(Hinweis: Das in der Vorlesung nicht behandelte Kapitel 7.3 im Skript kann Ihnen bei der Bearbeitung dieser Aufgabe behilflich sein.)

12.4. *(Lokalisierung II)* (∗4 Punkte)

Betrachten Sie das multiplikative System $S = \{ 2^n : n \in \mathbb{N}_0 \}$ in $\mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie: $S^{-1}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] := \{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0 \}$.

(b) Bestimmen Sie alle Ideale von $S^{-1}\mathbb{Z}$.

(c) Bestimmen Sie den Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(S^{-1}\mathbb{Z})$ von $S^{-1}\mathbb{Z}$.