UNIVERSITÄT PADERBORN
Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 15.10.2024

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Marc Technau
Nicolas Potthast

1. Präsenzblatt zur Algebra 1

T1.1. *(Heisenberggruppe)*
Es sei K ein Körper. Betrachten Sie die Menge

$$H_3(K) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{3\times 3} : a, b, c \in K \right\}$$

mit der üblichen Matrixmultiplikation als Verknüpfung.

(a) Zeigen Sie, dass $H_3(K)$ eine nicht-abelsche Gruppe ist.

(b) Es sei nun $K = \mathbb{F}_2$. Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppe $H_3(\mathbb{F}_2)$, die Ordnungen aller ihrer Elemente sowie alle ihre Untergruppen.

T1.2. *(Gruppentafeln)*
Es sei $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ eine n-elementige Menge und $\circ\colon G \times G \to G$ eine Verknüpfung derart, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe bildet. Die zugehörige ***Gruppentafel*** ist definiert als die $n \times n$-Matrix T über G, deren (i, j)-ter Eintrag genau $g_i \circ g_j$ ist:

$$\begin{pmatrix} g_1 \circ g_1 & g_1 \circ g_2 & g_1 \circ g_3 & \cdots & g_1 \circ g_n \\ g_2 \circ g_1 & g_2 \circ g_2 & g_2 \circ g_3 & \cdots & g_2 \circ g_n \\ g_3 \circ g_1 & g_3 \circ g_2 & g_3 \circ g_3 & \cdots & g_3 \circ g_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n \circ g_1 & g_n \circ g_2 & g_n \circ g_3 & \cdots & g_n \circ g_n \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass jedes Gruppenelement $g \in G$ in jeder Zeile und in jeder Spalte der Gruppentafel T *genau einmal* vorkommt.

(b) Es seien g_1, g_2 und g_3 drei paarweise verschiedene Elemente. Bestimmen Sie alle Gruppentafeln T, die durch Ausstattung von $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ mit einer Gruppenstruktur entstehen können. (Sie dürfen zur Vereinfachung davon ausgehen, dass nur Gruppenstrukturen auf G betrachtet werden, bezüglich derer g_1 das neutrale Element ist.)

T1.3. *(Produkte: 'abstract nonsense')*
Es seien X und Y zwei Mengen und $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ ihr kartesisches Produkt. Es sei $\pi_X\colon X \times Y \to X$ gegeben durch $\pi_X(x, y) = x$ und π_Y sei analog definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $X \times Y$ zusammen mit π_X und π_Y die folgende Eigenschaft erfüllt: Für je zwei Abbildungen $f_X\colon M \to X$ und $f_Y\colon M \to Y$ gibt es *genau eine* Abbildung

$\gamma\colon M \to X \times Y$, die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, bend right, "f_X"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\gamma"'] \arrow[dr, bend left, "f_Y"] & \\
& X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"] \arrow[dr, "\pi_Y"'] & \\
X & & Y\,.
\end{tikzcd}$$

(Hinweis: ein Diagramm wie das obige heißt ***kommutativ***, falls je zwei Möglichkeiten von einer Stelle zu einer anderen entlang der gezeichneten Pfeile zu ‘laufen’ (und dabei die auf den Pfeilen notierten Abbildungen verkettend) dieselbe Abbildung vermitteln. Im vorliegenden Fall bedeutet dies $f_X \overset{!}{=} \pi_X \circ \gamma$ und $f_Y \overset{!}{=} \pi_Y \circ \gamma$.)

(b) Es sei Z eine weitere Menge zusammen mit zwei Abbildungen $p_X\colon Z \to X$ und $p_Y\colon Z \to Y$ derart, dass für jedes Tripel (M, f_X, f_Y) wie in (a) *genau eine* Abbildung $g\colon M \to Z$ existiert, welche das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, bend right, "f_X"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,g"'] \arrow[dr, bend left, "f_Y"] & \\
& Z \arrow[dl, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\
X & & Y\,.
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie dann, dass die so für $(M, f_X, f_Y) = (X \times Y, \pi_X, \pi_Y)$ erhaltene Abbildung $g\colon X \times Y \to Z$ eine Bijektion ist.
(Hinweis: Probieren Sie, sich einen Kandidaten für eine Umkehrabbildung $Z \to X \times Y$ von g zu beschaffen. Zur Vereinfachung können Sie zusätzlich annehmen, dass π_X, π_Y, p_X sowie p_Y surjektiv sind, auch wenn diese Annahme nicht notwendig ist.)