Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Marc Technau
Nicolas Potthast

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 22.10.2024

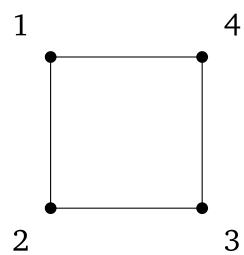
2. Präsenzblatt zur Algebra 1

T2.1. *(Konjugation von Untergruppen)*
Betrachten Sie eine Gruppe $(G, \circ)$ sowie eine Untergruppe U von G.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ die Menge $U_g := g \circ U \circ g^{-1}$ ebenfalls eine Untergruppe von G ist.

(b) Nehmen sie nun an, dass U endliche Ordnung hat. Zeigen Sie, dass dann $\#U = \#U_g$ für alle $g \in G$ gilt.

T2.2. *(Symmetriegruppe des Quadrats)*
Betrachten Sie das Quadrat



(a) Bestimmen Sie alle Permutationen der 4 Ecken, die die geometrische Struktur des Quadrats erhalten.

(b) Zeigen Sie, dass sich jede Permutation aus Teil (a) als Komposition von

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_4 \,.$$

darstellen lässt. Zeigen Sie ferner die Gleichung $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma^3$.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge der Permutationen aus (a) eine Untergruppe der $\mathfrak{S}_4$, die sogenannte Symmetriegruppe des Quadrats, ist.

(d) Ist diese Gruppe abelsch?

<u>Hinweis:</u> Die Erhaltung der geometrischen Struktur bedeutet insbesondere, dass sich gegenüberliegende Ecken nach der Permutation der Ecken immer noch gegenüberliegen und die 4 Kanten mit ihren jeweiligen Eckpunkten bestehen bleiben.

T2.3. *(Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$)*
Beweisen Sie Proposition 1.11:

(a) Die Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind genau die Mengen $n\mathbb{Z} = \{\, nz : z \in \mathbb{Z} \,\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt: $m\mathbb{Z} \supseteq n\mathbb{Z} \iff m$ teilt n. („Teilen heißt Enthalten.“)