

3. Präsenzblatt zur Algebra 1

T3.1. (*Fingerübungen zu Normalteilern*)

Sei G eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Wenn G abelsch ist, so ist jede Untergruppe U von G ein Normalteiler.
- (b) Wenn G endliche Ordnung hat und nur eine Untergruppe U mit Ordnung $\#U$ besitzt, so ist U ein Normalteiler.

T3.2. (*Isomorphismus zyklischer Gruppen*)

Zeigen Sie, dass die Gruppen C_n und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (für ein festes $n \in \mathbb{N}$) isomorph sind.

T3.3. (*Konjugation und innere Automorphismen*)

Betrachten Sie eine Gruppe $(G, \circ)$. Für ein festes $h \in G$ definieren wir die Konjugationsabbildung $i_h : G \rightarrow G, g \mapsto h \circ g \circ h^{-1}$. Zudem definieren wir die Menge aller Konjugationsabbildungen von Elementen aus G als $\text{Inn}(G) := \{i_h : h \in G\}$. Zeigen Sie:

- (a) Die Abbildung i_h ist ein Gruppenisomorphismus, also ein Gruppenautomorphismus von G .
- (b) Die Menge $\text{Inn}(G)$ ist ein Normalteiler von $\text{Aut}(G)$. Man bezeichnet $\text{Inn}(G)$ auch als Menge der inneren Automorphismen von G .
- (c) Es gilt genau dann $i_h = \text{id}_G$, wenn h mit allen $g \in G$ kommutiert.