Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 05.11.2024

UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Nicolas Potthast

4. Präsenzblatt zur Algebra 1

T4.1. *(Beispiele zum ersten Isomorphiesatz)*
Verwenden Sie Korollar 2.7 und beweisen Sie die folgenden Isomorphismen von Gruppen:

(a) Für eine Gruppe $(G, \circ)$ gilt $G/Z(G) \cong \operatorname{Inn}(G)$, wobei $Z(G) = \{h \in G : h \circ g = g \circ h \ \ \forall g \in G\}$ das sogenannte Zentrum von G ist.

(b) Es seien G und H Gruppen sowie J ein Normalteiler von G und K ein Normalteiler von H. Dann gilt $(G \times H)/(J \times K) \cong (G/J) \times (H/K)$.

(c) Es gilt $\mathbb{C}^\times/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}_{>0}$.

(Hinweis: erinnern Sie sich in Teil (a) an Aufgabe T3.3.)

T4.2. *(Zweiter Isomorphiesatz)*
Beweisen Sie Satz 2.11: es sei G eine Gruppe, $U \leq G$ und $N \trianglelefteq G$. Dann ist auch $UN \leq G$ und $U \cap N \trianglelefteq U$ sowie $UN/N \cong U/(U \cap N)$.
Hinweis: für die gefragte Isomorphie, betrachten Sie das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten, wobei die gezeichneten Pfeile die „offensichtlichen“ Homomorphismen bedeuten sollen:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & U \cap N \arrow[r, hook, "\text{Inkl.}"] \arrow[d, hook, "\text{Inkl.}"] & U \arrow[r] \arrow[d, hook, "\text{Inkl.}"] & U/(U \cap N) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists ?"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "\text{Inkl.}"] & UN \arrow[r] & UN/N \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}
$$

T4.3. *(Isomorphiesatz für Vektorräume)*

(a) Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum sowie $U \leq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass $V/U = \{v + U : v \in V\}$ ein K-Vektorraum ist. Dieser wird als Faktorraum oder Quotientenvektorraum bezeichnet.

(b) Es seien K ein Körper, V und W jeweils K-Vektorräume sowie $\phi : V \to W, v \mapsto \phi(v)$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $\phi = \iota \circ \overline{\phi} \circ \pi$ gilt, wobei

- $\pi : V \to V/\ker(\phi), v \mapsto v + \ker(\phi)$ ein Epimorphismus (von Vektorräumen) ist,
- $\overline{\phi} : V/\ker(\phi) \to \phi(V), v + \ker(\phi) \mapsto \phi(v)$ ein Isomorphismus (von Vektorräumen) ist,

- $\iota : \phi(V) \to W, v \mapsto v$ ein Monomorphismus (von Vektorräumen) ist.

Insbesondere gilt also $V/\ker(\phi) \cong \phi(V) = \mathrm{im}(\phi)$.