UNIVERSITÄT PADERBORN

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 12.11.2024

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Marc Technau
Nicolas Potthast

5. Präsenzblatt zur Algebra 1

T5.1. *(Isomorphiesatz für Vektorräume)*

(a) Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum sowie $U \leq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass $V/U = \{v + U : v \in V\}$ ein K-Vektorraum ist. Dieser wird als Faktorraum oder Quotientenvektorraum bezeichnet.

(b) Es seien K ein Körper, V und W jeweils K-Vektorräume sowie $\phi : V \to W, v \mapsto \phi(v)$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $\phi = \iota \circ \overline{\phi} \circ \pi$ gilt, wobei

- $\pi : V \to V/\ker(\phi), v \mapsto v + \ker(\phi)$ ein Epimorphismus (von Vektorräumen) ist,
- $\overline{\phi} : V/\ker(\phi) \to \phi(V), v + \ker(\phi) \mapsto \phi(v)$ ein Isomorphismus (von Vektorräumen) ist,
- $\iota : \phi(V) \to W, v \mapsto v$ ein Monomorphismus (von Vektorräumen) ist.

Insbesondere gilt also $V/\ker(\phi) \cong \phi(V) = \mathrm{im}(\phi)$.

T5.2. *(Diedergruppen)*

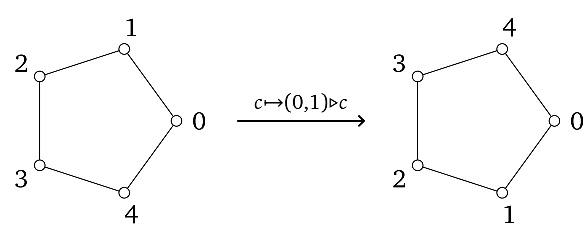
Im Folgenden sei $n \geq 3$. Ferner bezeichne $\varphi\colon C_2 \to \mathrm{Aut}(C_n)$ den Gruppenhomomorphismus mit $\varphi(0) = \mathrm{id}_{C_n}$ und $\varphi(1) = (x \mapsto -x) \in \mathrm{Aut}(C_n)$.

(a) Es sei $D_{2n} := C_n \rtimes_\varphi C_2$ das semidirekte Produkt von C_n mit C_2 bezüglich φ aus Teil (a) zusammen mit der Verknüpfung $\star$ (vgl. Aufgabe 4.1). Zeigen Sie, dass D_{2n} via

$$(a,b) \triangleright c := \text{erste Koordinate von } ((a,b) \star (c,0))$$

treu und transitiv auf C_n operiert.

(b) Beschriften Sie für $n \in \{4,5\}$ die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks der Reihe nach mit den Elementen $0, 1, \dots, n-1$ von C_n und skizzieren Sie, wie die Elemente von D_{2n} darauf operieren, zum Beispiel für das Element $(0,1) \in D_{2n}$:



(c) Interpretieren Sie (für beliebige $n \geq 3$) die Operation von D_{2n} auf C_n geometrisch.

(d) Erinnern Sie sich an Aufgabe T1.1 und Aufgabe T2.2 und bringen Sie die Ergebnisse dieser Aufgaben mit der Gruppe $D_8 \coloneqq C_4 \rtimes_\varphi C_2$ in Zusammenhang. Hierbei dürfen Sie ebenfalls auf Aufgabe 4.1 zurückgreifen.

(e) Welche Gruppe ergibt sich für den Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon C_2 \to \operatorname{Aut}(C_n)$ mit $\varphi(0) = \varphi(1) = \mathrm{id}_{C_n}$ (das heißt φ ist der triviale Gruppenhomomorphismus)? Vergleichen Sie diese Gruppe mit D_{2n}.