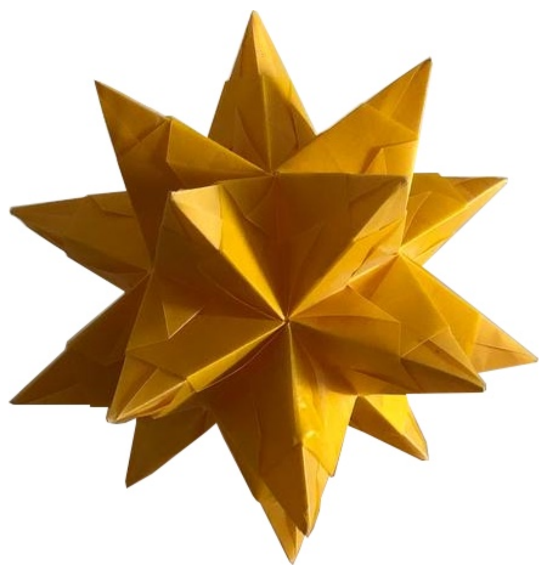
Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Marc Technau
Nicolas Potthast

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 19.11.2024

6. Präsenzblatt zur Algebra 1

T6.1. *(Operationen und Symmetrien: Bascetta-Stern, II)*
Betrachten Sie den Bascetta-Stern $\mathscr{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 5.4, wo Sie als Teilaufgabe (a) einen solchen Stern gebastelt hatten:



Es bezeichne G die Gruppe der Drehungen des dreidimensionalen Raumes, welche den Bascetta-Stern $\mathscr{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ invariant lassen, wobei $\mathscr{B}$ als angemessen idealisiert anzusehen ist, sodass Faltungenauigkeiten vernachlässigt werden können. Lösen Sie nun die folgenden weiterführenden Aufgaben:

(b) Zeigen Sie, dass G treu auf $\mathscr{B}$ operiert und endlich ist.

(c) Bestimmen Sie die Ordnung von G.

T6.2. *(Gruppen der Ordnung* 12*)*

(a) Zeigen Sie, dass jede Gruppe G der Ordnung 12 einen Normalteiler $N \neq \{1_G\}, G$ besitzt.
(Hinweis: Überlegen Sie sich mittels Satz 3.3 (3), wie 2- bzw. 3-Sylowgruppen es in G geben kann. Überlegen Sie sich ferner, wie viele Sylowgruppen in G überhaupt Platz haben. Um Normalität einer Sylowgruppe zu folgern, dürfen Sie Korollar 3.4 benutzen.)

(b) Es bezeichne P_2 eine 2-Sylowgruppe von G und P_3 sei eine 3-Sylowgruppe von G. Geben Sie für jeden der folgenden drei Fälle ein Beispiel (mit Begründung!) für eine

Gruppe G mit Ordnung 12 und den geforderten Eigenschaften an:

$$(1)\ \ P_2 \trianglelefteq G \text{ und } P_3 \trianglelefteq G, \quad (2)\ \ P_2 \trianglelefteq G \text{ und } P_3 \ntrianglelefteq G, \quad (3)\ \ P_2 \ntrianglelefteq G \text{ und } P_3 \trianglelefteq G.$$