Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 26.11.2024

Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Marc Technau
Nicolas Potthast

7. Präsenzblatt zur Algebra 1

T7.1. *(Nicht alle Gruppen sind ein semidirektes Produkt)*
Es seien p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Gruppe C_{p^n} und zeigen Sie, dass diese kein (nicht-triviales) semidirektes Produkt ist.

T7.2. *(A_n ist einfach für $n \geq 5$)*
Es bezeichne A_n die alternierende Gruppe in $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Sym}(\{1, \dots, n\})$. Zeigen Sie:

(a) Für $n \geq 3$ wird A_n von den 3-Zyklen erzeugt.
(Hinweis: welche Zyklen entstehen als das Produkt zweier Transpositionen?)

(b) Für $n \geq 5$ sind alle 3-Zyklen konjugiert in A_n.
(Hinweis: die fragliche Konjugiertheit in $\mathfrak{S}_n$ ist *a-priori* einfacher einzusehen. Kann man daraus nun die Konjugiertheit in A_n gewinnen? Beachten Sie, dass die Voraussetzung $n \geq 5$ einem zu jedem 3-Zyklus zwei permutierbare Zahlen zur Verfügung stellt, die nicht in selbigem 3-Zyklus vorkommen.)

(c) Satz 4.7: für $n \geq 5$ ist A_n einfach.
(Hinweis: sei $N \neq \{\mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}\}$ ein Normalteiler von A_n. Betrachten Sie ein Element $\sigma \neq \mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}$ von N, welches maximal viele Elemente von $\{1, \dots, n\}$ fixiert, und zeigen Sie dann, dass σ ein 3-Zyklus sein muss. Hierbei hilft es erneut, in disjunkte Zyklen zu zerlegen. Folgern Sie anschließend $N = A_n$.)