

8. Präsenzblatt zur Algebra 1

T8.1. (Isomorphietypen endlicher abelscher Gruppen mit vorgegebener Ordnung)

Es sei G eine endliche abelsche Gruppe.

(a) Bestimmen Sie jeweils alle möglichen Isomorphietypen mit

- $|G| = 6$.
- $|G| = 12$.
- $|G| = 16$.
- $|G| = 360$.
- $|G| = p^2q^2$ für verschiedene Primzahlen p und q .
- $|G| = p^3q^3r^4$ für (paarweise) verschiedene Primzahlen p , q und r .

(b) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Anzahl verschiedener Isomorphietypen mit Ordnung $|G|$ an.

T8.2. (Klassifikation endlicher abelscher Gruppen via Invarianten)

(a) Zeigen Sie:

Jede endliche abelsche Gruppe G ist isomorph zu einer Gruppe der Form

$$C_{d_1} \times \dots \times C_{d_t}$$

mit $t \in \mathbb{N}_0$, $d_i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $d_i \mid d_{i+1}$ für alle $1 \leq i \leq t-1$. Die d_i werden als *Elementarteiler* bezeichnet.

(b) Es sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung 48 mit Gruppenexponent 12. Bestimmen Sie alle möglichen Isomorphietypen, die für G in Frage kommen. Falls der Isomorphietyp noch nicht eindeutig bestimmt sein sollte, geben Sie zusätzlich ein Kriterium an, wie die verschiedenen Isomorphietypen unterschieden werden können.