

9. Präsenzblatt zur Algebra 1

T9.1. (Operationen mit Idealen)

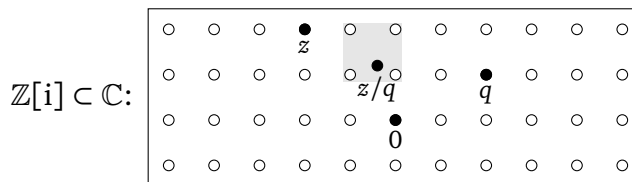
Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale eines Rings R . Betrachten Sie das *Komplexprodukt* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} := \{ab : a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$, sowie das *Idealprodukt* $\mathfrak{a}\mathfrak{b} := \langle \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \rangle$ von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Zeigen Sie:

- (a) $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2$ braucht im Allgemeinen kein Ideal von R zu sein (Beispiel!).
- (b) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und im Allgemeinen kann hierbei strikte Inklusion „ $\subset$ “ gelten (Beispiel!).
- (c) Gilt $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$ und ist R kommutativ, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

T9.2. (Die ganzen Gaußschen Zahlen)

Betrachten Sie $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ zusammen mit der Funktion $N: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{N}_0$, $a + ib \mapsto (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ (mit $a, b \in \mathbb{Z}$). Zeigen Sie:

- (a) Zu $z, q \in \mathbb{Z}[i]$ mit $q \neq 0$ existieren $w, r \in \mathbb{Z}[i]$ mit $z = wq + r$ derart, dass $r = 0$ oder $N(r) < N(q)$ gilt.



(Bemerkung: dies ist ein Analogon zur Division mit Rest in $\mathbb{Z}$ oder bei Polynomen.)

- (b) $(\mathbb{Z}[i])^\times = \{-1, 1, -i, i\}$. Ist $(\mathbb{Z}[i])^\times \cong C_4$ oder $(\mathbb{Z}[i])^\times \cong C_2 \times C_2$?