

10. Präsenzblatt zur Algebra 1

T10.1. (Erzeugung von Idealen)

Es seien R ein Ring und $A \subseteq R$. Betrachten Sie das von A erzeugte Ideal $\langle A \rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass im Fall eines kommutativen Rings

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i r_i : n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a_i \in A, r_i \in R \forall 1 \leq i \leq n \right\}$$

gilt.

(b) Geben Sie für den Ring $R = \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ ein Beispiel an, in dem die Gleichheit aus Teil (a) nicht gilt.

T10.2. (Isomorphiesatz für Ringe)

Zeigen Sie:

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und für $1 \leq i \leq n$ seien R_i Ringe und $\mathfrak{a}_i \trianglelefteq R_i$ Ideale. Dann gilt

$$\prod_{i=1}^n R_i / \prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \cong \prod_{i=1}^n R_i / \mathfrak{a}_i.$$

(b) Seien R ein Ring und $\mathfrak{a} \trianglelefteq R$, $\mathfrak{b} \trianglelefteq R$ Ideale mit der Eigenschaft $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$. Dann gelten $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \trianglelefteq R/\mathfrak{a}$ sowie

$$(R/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \cong R/\mathfrak{b}.$$