UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Nicolas Potthast

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 07.01.2025

11. Präsenzblatt zur Algebra 1

T11.1. *(Multivariate Polynome)*

Es bezeichne I eine beliebige Indexmenge und $M = \mathbb{N}_0^{(I)}$ sei die Menge aller Abbildungen $I \to \mathbb{N}_0$, die für alle bis auf höchstens endlich viele Indizes aus I den Wert 0 annehmen, zusammen mit punktweise definierter Addition. Für einen kommutativen Ring R sei $R[M]$ die Menge aller Abbildungen $M \to R$, welche auf allen bis auf höchstens endlich vielen Elementen von M den Wert 0_R annehmen, zusammen mit punktweise definierter Addition und der wie folgt zu definierenden Multiplikation:

$$(f\colon M \to R) \cdot (g\colon M \to R) := \left(M \to R,\ c \mapsto \sum_{\substack{a,b \in M \\ a+b=c}} f(a)g(b) \right).$$

Für $i \in I$ bezeichne $X_i\colon M \to R$ die Abbildung mit $X_i(i) = 1_R$ und $X_i(j) = 0_R$ für alle $j \in I \setminus \{i\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Das oben definierte Produkt $f \cdot g$ zweier Elemente $f, g \in R[M]$ ist tatsächlich ein Element von $R[M]$ und $R[M]$ bildet zusammen mit den hier definierten inneren Verknüpfungen einen kommutativen Ring. (Hinweis: alle Ringaxiome zu verifizieren wäre etwas lästig. Besprechen Sie nur eine repräsentative Auswahl nach eigenem Ermessen.)

(b) $$\iota\colon R \to R[M],\ r \mapsto \begin{cases} M \to R, \\ a \mapsto \begin{cases} r & \text{falls } a = (i \mapsto 0), \\ 0_R & \text{sonst,} \end{cases} \end{cases}$$
ist ein Ringmonomorphismus.

(c) Jedes $f \in R[M]$ lässt sich als $f = \sum_{a \in M} \iota(f(a)) \prod_{i \in I} X_i^{a(i)}$ schreiben.

(Die auftretenden Produkte haben stets höchstens endlich viele von $1_{R[M]} = X_i^0$ verschiedene Faktoren und die auftretende Summe nur höchstens endlich viele von $0_{R[M]}$ verschiedene Summanden und können somit betrachtet werden, ohne über Konvergenz sprechen zu müssen.)

(d) Ist $f\colon R \to S$ ein Homomorphismus in einen beliebigen kommutativen Ring S und $\epsilon\colon I \to S$ eine beliebige Abbildung, so gibt es genau einen Ringhomomorphismus

$\varepsilon\colon R[M] \to S$, welcher das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i\mapsto X_i"'] \arrow[rr, bend left, "\epsilon"] & R[M] \arrow[r, dashed, "\exists!\,\varepsilon"'] & S\,. \\
& R \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, bend right, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung: man schreibt auch $R[\boldsymbol{X}]$ statt $R[M]$ mit $\boldsymbol{X} = \{X_i : i \in I\}$ und nennt $R[\boldsymbol{X}]$ den ***Polynomring*** über R in den ***Variablen*** (oder ***Unbestimmten***/***Veränderlichen***) X_i $(i \in I)$. Eigentlich sind die hier diskutierten Objekte sehr konkret: etwa für $I = \{1,2,3,4\}$ und $R = \mathbb{Z}$ ist ein typisches Element von $R[\boldsymbol{X}]$ gleich $10X_1^0 + X_1^{20} + 60X_1^9X_2X_4^7$.
Das Bild dieses Elements unter f aus Teil (d) wäre dann $f(10)\epsilon(1)^0 + \epsilon(1)^{20} + f(60)\epsilon(1)^9\epsilon(2)\epsilon(4)^7$.