

12. Präsenzblatt zur Algebra 1

T12.1. (Multivariate Polynome)

Es bezeichne I eine beliebige Indexmenge und $M = \mathbb{N}_0^{(I)}$ sei die Menge aller Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{N}_0$, die für alle bis auf höchstens endlich viele Indizes aus I den Wert 0 annehmen, zusammen mit punktweise definierter Addition. Für einen kommutativen Ring R sei $R[M]$ die Menge aller Abbildungen $M \rightarrow R$, welche auf allen bis auf höchstens endlich vielen Elementen von M den Wert 0_R annehmen, zusammen mit punktweise definierter Addition und der wie folgt zu definierenden Multiplikation:

$$(f: M \rightarrow R) \cdot (g: M \rightarrow R) := \left(M \rightarrow R, c \mapsto \sum_{\substack{a, b \in M \\ a+b=c}} f(a)g(b) \right).$$

Für $i \in I$ bezeichne $X_i: M \rightarrow R$ die Abbildung mit $X_i(i) = 1_R$ und $X_i(j) = 0_R$ für alle $j \in I \setminus \{i\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Das oben definierte Produkt $f \cdot g$ zweier Elemente $f, g \in R[M]$ ist tatsächlich ein Element von $R[M]$ und $R[M]$ bildet zusammen mit den hier definierten inneren Verknüpfungen einen kommutativen Ring. (Hinweis: alle Ringaxiome zu verifizieren wäre etwas lästig. Besprechen Sie nur eine repräsentative Auswahl nach eigenem Ermessen.)

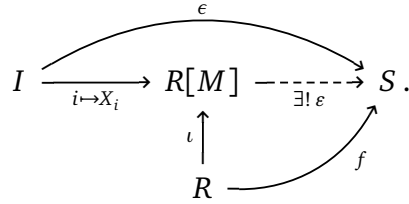
- (b) $\iota: R \rightarrow R[M], r \mapsto \begin{cases} M \rightarrow R, \\ a \mapsto \begin{cases} r & \text{falls } a = (i \mapsto 0), \\ 0_R & \text{sonst,} \end{cases} \end{cases}$
ist ein Ringmonomorphismus.

- (c) Jedes $f \in R[M]$ lässt sich als $f = \sum_{a \in M} \iota(f(a)) \prod_{i \in I} X_i^{a(i)}$ schreiben.

(Die auftretenden Produkte haben stets höchstens endlich viele von $1_{R[M]} = X_i^0$ verschiedene Faktoren und die auftretende Summe nur höchstens endlich viele von $0_{R[M]}$ verschiedene Summanden und können somit betrachtet werden, ohne über Konvergenz sprechen zu müssen.)

- (d) Ist $f: R \rightarrow S$ ein Homomorphismus in einen beliebigen kommutativen Ring S und $\epsilon: I \rightarrow S$ eine beliebige Abbildung, so gibt es genau einen Ringhomomorphismus

$\epsilon: R[M] \rightarrow S$, welcher das folgende Diagramm kommutativ macht:



Bemerkung: man schreibt auch $R[X]$ statt $R[M]$ mit $X = \{X_i : i \in I\}$ und nennt $R[X]$ den **Polynomring** über R in den **Variablen** (oder **Unbestimmten/Veränderlichen**) X_i ($i \in I$). Eigentlich sind die hier diskutierten Objekte sehr konkret: etwa für $I = \{1, 2, 3, 4\}$ und $R = \mathbb{Z}$ ist ein typisches Element von $R[X]$ gleich $10X_1^0 + X_1^{20} + 60X_1^9X_2X_4^7$. Das Bild dieses Elements unter f aus Teil (d) wäre dann $f(10)\epsilon(1)^0 + \epsilon(1)^{20} + f(60)\epsilon(1)^9\epsilon(2)\epsilon(4)^7$.

T12.2. (Nicht-prime irreduzible Elemente)

Betrachten Sie den Ring $R := \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + i\sqrt{5}b \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. (Die Ringaxiome nachzurechnen ist hier nicht gefordert.) Zeigen Sie dann, dass es sich bei

$$2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5}),$$

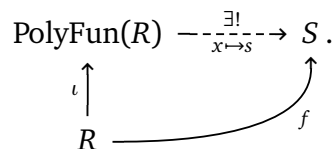
um zwei Zerlegungen von $6 \in R$ in Produkte irreduzibler Elemente handelt, aber die darin vorkommenden Elemente keine Primelemente in R sind.

(Hinweis: betrachten Sie die Funktion $N: R \rightarrow \mathbb{Z}$ aus Aufgabe 9.4 ; wegen $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in R$ lässt sich damit Teilbarkeit in R auf Teilbarkeit in \mathbb{Z} zurückführen.)

T12.3. (Polynome vs. Polynomfunktionen)

Sei R ein kommutativer Ring. Es bezeichne $\text{PolyFun}(R) \subseteq \text{Abb}(R, R)$ die Menge der Funktionen $R \rightarrow R$, welche durch Polynome gegeben sind (also $\epsilon_{\bullet}(R[X])$ in der Notation von § 7.2). Man hat die kanonische Einbettung $\iota: R \rightarrow \text{PolyFun}(R)$, welche jedem $r \in R$ die konstante Abbildung $R \rightarrow R$, $a \mapsto r$, zuordnet. Wir sagen, $x \in \text{PolyFun}(R)$ sei **von variablem Typ**, falls die folgende Eigenschaft erfüllt ist (vgl. Satz 7.4):

Für jeden kommutativen Ring S , Ringhomomorphismus $f: R \rightarrow S$ und jedes $s \in S$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\text{PolyFun}(R) \rightarrow S$, welcher x auf s abbildet und das folgende Diagramm kommutativ macht:



- Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R und ein Element $x \in \text{PolyFun}(R)$ von variablem Typ an.
- Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R an, sodass es kein Element $x \in \text{PolyFun}(R)$ von variablem Typ gibt.