

## 12. Präsenzblatt zur Algebra 1

### T12.1. (Multivariate Polynome)

Es bezeichne  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $M = \mathbb{N}_0^{(I)}$  sei die Menge aller Abbildungen  $I \rightarrow \mathbb{N}_0$ , die für alle bis auf höchstens endlich viele Indizes aus  $I$  den Wert 0 annehmen, zusammen mit punktweise definierter Addition. Für einen kommutativen Ring  $R$  sei  $R[M]$  die Menge aller Abbildungen  $M \rightarrow R$ , welche auf allen bis auf höchstens endlich vielen Elementen von  $M$  den Wert  $0_R$  annehmen, zusammen mit punktweise definierter Addition und der wie folgt zu definierenden Multiplikation:

$$(f: M \rightarrow R) \cdot (g: M \rightarrow R) := \left( M \rightarrow R, c \mapsto \sum_{\substack{a, b \in M \\ a+b=c}} f(a)g(b) \right).$$

Für  $i \in I$  bezeichne  $X_i: M \rightarrow R$  die Abbildung mit  $X_i(i) = 1_R$  und  $X_i(j) = 0_R$  für alle  $j \in I \setminus \{i\}$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Das oben definierte Produkt  $f \cdot g$  zweier Elemente  $f, g \in R[M]$  ist tatsächlich ein Element von  $R[M]$  und  $R[M]$  bildet zusammen mit den hier definierten inneren Verknüpfungen einen kommutativen Ring. (Hinweis: alle Ringaxiome zu verifizieren wäre etwas lästig. Besprechen Sie nur eine repräsentative Auswahl nach eigenem Ermessen.)

(b)  $\iota: R \rightarrow R[M], r \mapsto \begin{cases} M \rightarrow R, \\ a \mapsto \begin{cases} r & \text{falls } a = (i \mapsto 0), \\ 0_R & \text{sonst,} \end{cases} \end{cases}$   
ist ein Ringmonomorphismus.

- (c) Jedes  $f \in R[M]$  lässt sich als  $f = \sum_{a \in M} \iota(f(a)) \prod_{i \in I} X_i^{a(i)}$  schreiben.

(Die auftretenden Produkte haben stets höchstens endlich viele von  $1_{R[M]} = X_i^0$  verschiedene Faktoren und die auftretende Summe nur höchstens endlich viele von  $0_{R[M]}$  verschiedene Summanden und können somit betrachtet werden, ohne über Konvergenz sprechen zu müssen.)

- (d) Ist  $f: R \rightarrow S$  ein Homomorphismus in einen beliebigen kommutativen Ring  $S$  und  $\epsilon: I \rightarrow S$  eine beliebige Abbildung, so gibt es genau einen Ringhomomorphismus

$\varepsilon: R[M] \rightarrow S$ , welcher das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & e & & \\
 & I & \xrightarrow{i \mapsto X_i} & R[M] & \xrightarrow{\exists! \varepsilon} S \\
 & & \uparrow \iota & & \nearrow f \\
 & & R & &
 \end{array}$$

Bemerkung: man schreibt auch  $R[X]$  statt  $R[M]$  mit  $X = \{X_i : i \in I\}$  und nennt  $R[X]$  den **Polynomring** über  $R$  in den **Variablen** (oder **Unbestimmten/Veränderlichen**)  $X_i$  ( $i \in I$ ). Eigentlich sind die hier diskutierten Objekte sehr konkret: etwa für  $I = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $R = \mathbb{Z}$  ist ein typisches Element von  $R[X]$  gleich  $10X_1^0 + X_1^{20} + 60X_1^9X_2X_4^7$ . Das Bild dieses Elements unter  $f$  aus Teil (d) wäre dann  $f(10)\varepsilon(1)^0 + \varepsilon(1)^{20} + f(60)\varepsilon(1)^9\varepsilon(2)\varepsilon(4)^7$ .

### T12.2. (Nicht-prime irreduzible Elemente)

Betrachten Sie den Ring  $R := \mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + i\sqrt{5}b \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ . (Die Ringaxiome nachzurechnen ist hier nicht gefordert.) Zeigen Sie dann, dass es sich bei

$$2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5}),$$

um zwei Zerlegungen von  $6 \in R$  in Produkte irreduzibler Elemente handelt, aber die darin vorkommenden Elemente keine Primelemente in  $R$  sind.

(Hinweis: betrachten Sie die Funktion  $N: R \rightarrow \mathbb{Z}$  aus Aufgabe 9.4 ; wegen  $N(xy) = N(x)N(y)$  für alle  $x, y \in R$  lässt sich damit Teilbarkeit in  $R$  auf Teilbarkeit in  $\mathbb{Z}$  zurückführen.)

### T12.3. (Polynome vs. Polynomfunktionen)

Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Es bezeichne  $\text{PolyFun}(R) \subseteq \text{Abb}(R, R)$  die Menge der Funktionen  $R \rightarrow R$ , welche durch Polynome gegeben sind (also  $\varepsilon_\bullet(R[X])$  in der Notation von § 7.2). Man hat die kanonische Einbettung  $\iota: R \rightarrow \text{PolyFun}(R)$ , welche jedem  $r \in R$  die konstante Abbildung  $R \rightarrow R$ ,  $a \mapsto r$ , zuordnet. Wir sagen,  $x \in \text{PolyFun}(R)$  sei **von variablem Typ**, falls die folgende Eigenschaft erfüllt ist (vgl. Satz 7.4):

Für jeden kommutativen Ring  $S$ , Ringhomomorphismus  $f: R \rightarrow S$  und jedes  $s \in S$  gibt es genau einen Ringhomomorphismus  $\text{PolyFun}(R) \rightarrow S$ , welcher  $x$  auf  $s$  abbildet und das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{PolyFun}(R) & \xrightarrow{\exists!} & S \\
 \uparrow \iota & & \nearrow f \\
 R & &
 \end{array}$$

- Geben Sie ein Beispiel für einen Ring  $R$  und ein Element  $x \in \text{PolyFun}(R)$  von variablem Typ an.
- Geben Sie ein Beispiel für einen Ring  $R$  an, sodass es kein Element  $x \in \text{PolyFun}(R)$  von variablem Typ gibt.