

13. Präsenzblatt zur Algebra 1

T13.1. *(Nicht-Existenz des ggT)*

Betrachten Sie den Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Zeigen Sie für die beiden Elemente $\alpha = 2$ und $\beta = 1 + \sqrt{-3}$ von R , dass $\text{ggT}(\alpha^2, \alpha\beta)$ nicht existiert.

(Hinweis: Erinnern Sie sich an Aufgabe T12.2.)

T13.2. *(Ein Körper mit genau 4 Elementen)*

Es sei $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $f = X^2 + X + 1_{\mathbb{F}_2} \in \mathbb{F}_2[X]$. Ferner sei $K = \mathbb{F}_2[X]/\langle f \rangle$.

- (a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist und folgern Sie, dass K ein Körper ist.
- (b) Bestimmen Sie alle Elemente von K und stellen Sie die zugehörigen Additions- und Multiplikationstabellen auf (vgl. Tutoriumsblatt 1).
- (c) Ist $K^\times$ zyklisch? Falls ja, bestimmen Sie *alle* Erzeuger von $K^\times$.

T13.3. *(Satz über rationale Nullstellen)*

- (a) Es sei $f = c_n X^n + \dots + c_1 X + c_0 X^0 \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit rationaler Nullstelle $\frac{a}{q} \in \mathbb{Q}$, a und q teilerfremd. Zeigen Sie $a \mid c_0$ und $q \mid c_n$.
- (b) Benutzen Sie Teil (a), um einzusehen, dass $\sqrt{2}$ (eine Nullstelle von $X^2 - 2$) nicht rational ist.
- (c) Bestimmen Sie alle Nullstellen in $\mathbb{Q}$ des Polynoms $3X^4 - 5X^3 + X^2 - 5X - 2$.