UNIVERSITÄT PADERBORN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Marc Technau
Nicolas Potthast

Wintersemester 2024/25
Paderborn, den 28.01.2025

14. Präsenzblatt zur Algebra 1

T14.1. *(Faktorisieren von Polynomen)*
Zerlegen Sie die folgenden Polynome über $\mathbb{Z}[X]$ in Primfaktoren:

(a) $X^8 - 1$,

(b) $8X^3 + 16X + 24$.

T14.2. *(Irreduzibilität)*
Untersuchen Sie die folgenden Polynome auf Irreduzibilität:

(a) $X^6 + 3X^2 + 15X^2 + 3X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$.

(b) $X^3 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

(c) $X^2 + 4XY + 4Y^2 \in \mathbb{Q}[X,Y]$.

(d) $X^5 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

(e) $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

T14.3. *(Kreisteilungspolynome)*
Es sei p eine Primzahl. Betrachten Sie das Polynom $f_p(X) = X^p - 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

(a) Zeigen Sie, dass das Polynom $f_p(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ reduzibel ist.

(b) Zerlegen Sie $f_p(X)$ über $\mathbb{Z}[X]$ in irreduzible Faktoren. Die Irreduzibilität der Faktoren ist zu begründen.

(c) Es sei nun $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ eine beliebige Nullstelle von $f_p(X)$.
Wie sehen alle p komplexen Nullstellen von $f_p(X)$ aus?
Zeigen Sie, dass alle Nullstellen von $f_p(X)$ eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ bilden und bestimmen Sie den Isomorphietyp dieser Gruppe.

(d) Zeigen Sie die Identität

$$\prod_{i=1}^{p-1} \left(1 - \zeta^i\right) = p.$$