

# Einführung in die komplexe Analysis

Marc Technau

MARC TECHNAU, INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ZAHLENTHEORIE, TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ, KOPERNIKUSGASSE 24, 8010 GRAZ  
*Email address:* [mtechnau@math.tugraz.at](mailto:mtechnau@math.tugraz.at)  
*URL:* <https://www.math.tugraz.at/~mtechnau>

Das Erstellen von Kopien (digital oder analog) dieses Vorlesungsskriptums zu  
Studienzwecken ist ausdrücklich gestattet.  
Etwaige Kopien sind nicht zum Verkauf oder zu sonstiger Weitergabe bestimmt.

2024-01-20 @ 12:10.

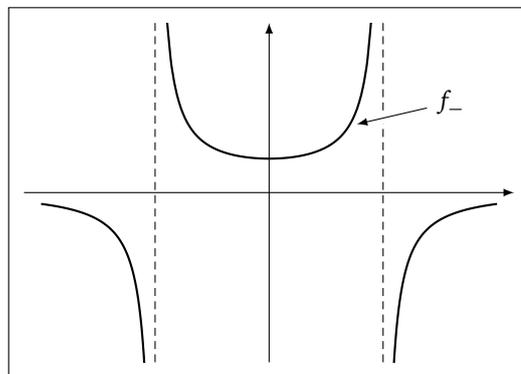
## Einleitung

Wir greifen inhaltlich des Öfteren auf Inhalte der *Analysis 1–2* zurück. Die Vorlesung orientiert sich nicht konkret an einem Buch. Bei der Ausarbeitung dieser Vorlesung waren jedoch die Lehrbücher [1, 2, 9, 10, 11, 17, 18] hilfreich. Die Bücher von Rudin [17] und Jänich [9, 10] seien hier als besonders inspirierend hervorgehoben. (Man beachte des Übrigen auch, dass [9] im Wesentlichen eine echte Obermenge des Inhalts von [10] behandelt und darum trotz des etwas in die Zeit gekommenen Schriftbildes durchaus eines Blickes wert ist!) Ergänzende Darstellungen, die insbesondere anschauliche Aspekte des Materials herausarbeiten und betonen, findet man in [15, 20]. Diverse Motivation zum Studium der komplexen Analysis findet man etwa in [17] anhand zahlreicher Querverbindungen zu anderen Gebieten der Analysis, sowie in dem dünnen Heft von Lax und Zalzman [12].

*Wozu komplexe Analysis?*

Wir betrachten die Funktion

$$f_-: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}.$$



Die bekannte Formel für die geometrische Reihe liefert

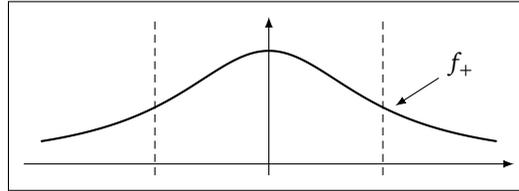
$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$ . Insbesondere konvergiert die Taylorreihe von  $f_-$  im Entwicklungspunkt 0 für *jedes*  $x$  mit  $|x| < 1$  und stellt dort die Funktion  $f_-$  da. Tatsächlich „sehen“ wir auch sofort, dass die Taylorreihe von  $f_-$  nicht gleichzeitig für

$x$  mit größerem Betrag konvergieren könnte und zudem  $f_-$  darstellt: Ansonsten ließe sich  $f_-$  nämlich stetig in die Punkte  $\pm 1$  fortsetzen!

Wir betrachten nun die Funktion

$$f_+ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}.$$



(Deren definierender Ausdruck unterscheidet sich von dem für  $f_-$  offenbar nur durch das Vorzeichen vor  $x^2$ .) Wir haben ganz analog

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$  und es ergeben sich analoge Aussagen für das Konvergenz- und Darstellungsverhalten der Taylorreihe von  $f_+$  im Entwicklungspunkt 0. *Doch weshalb ist der Konvergenzradius nicht größer? Weshalb stellt die Taylorreihe  $f_+$  nicht noch für  $|x| \geq 1$  dar?* — Im Gegensatz zu  $f_-$  hat  $f_+$  ja schließlich keine Definitionslücken.

Komplex betrachtet löst sich das Problem jedoch leicht auf: Der Bruch

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x+i)(x-i)},$$

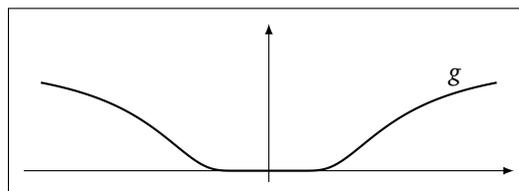
ist für  $x = \pm i$  nicht definiert und für  $x \rightarrow \pm i$  hat man  $\frac{1}{|1+x^2|} \rightarrow +\infty$ , was offenbar der Konvergenz der Potenzreihe auf der rechten Seite von

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

für jedes  $x$  mit  $|x| > 1$  widerspricht, da die Reihe dann insbesondere auch für  $x = i$  konvergieren würde und dies nicht damit in Einklang zu bringen ist, dass die linke Seite der Gleichung für  $x \rightarrow \pm i$  über alle Schranken wächst.

Eine ähnlich mysteriöse Situation tritt bei der Betrachtung der Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$



auf: Man kann zeigen, dass  $g$  unendlich oft differenzierbar ist und in 0 alle Ableitungen von  $g$  verschwinden. Die Taylorreihe von  $g$  um den Entwicklungspunkt 0 konvergiert also überall, stellt  $g$  jedoch *nur* im Punkt 0 dar.

Komplex betrachtet sehen wir, dass sich  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \exp(-1/z^2)$ , *nicht mal stetig* in 0 fortsetzen lässt (betrachte die Funktionswerte bei den Argumenten  $i/n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ). Unter diesem Betrachtungsaspekt kann mit einer Darstellbarkeit durch die zugehörige Taylorreihe kann also *a-priori* gar nicht gerechnet werden!

Aus der *Analysis* kennt man sicher das Integral

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

Was ist hingegen der Wert des Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx ?$$

Mit etwas Mühe kann man die Darstellung

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\log(1 + \sqrt{2} + t^2) - \log(1 - \sqrt{2} + t^2) + 2 \arctan(1 + \sqrt{2}t) - 2 \arctan(1 - \sqrt{2}t))$$

herleiten und dann

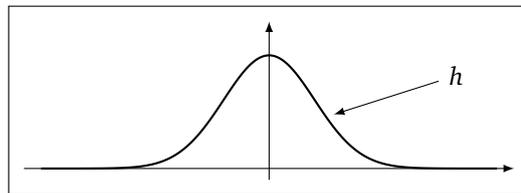
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

folgern.

Wie sieht es hingegen mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2) \exp(-2\pi i x \xi) dx$$

aus? (Das ist die Fouriertransformierte von  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-\pi x^2)$ .)



Vielleicht weiß man schon aus der *Analysis*, dass hier  $\exp(-\pi \xi^2)$  herauskommt. „Reelle“ Beweise dieses Resultats sind oft trickreich. Komplexe Analysis erlaubt hier deutlich transparentere Beweise und auch die zuvor angesprochenen uneigentlichen Integrale lassen sich *ohne* Zuhilfenahme von Stammfunktionen(!) berechnen.

Abschließend noch eine andere Frage von eher philosophischer Natur: Man kennt bereits die Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Weshalb definiert man  $\exp(z)$  für komplexe Argumente eben auch durch diese Potenzreihe? Oder weiter gefragt: Man kennt natürlich auch die reellen Sinus- und Kosinus-Funktionen und vielleicht auch die *Formel von Euler-Moivre*

$$\exp(iy) = \cos(y) + i \sin(y),$$

also insbesondere  $\cos(y) = \operatorname{Re}(\exp(iy))$  für reelles  $y$ . Weshalb *definiert* man nicht  $\cos(z) = \operatorname{Re}(\exp(iz))$  für beliebige  $z \in \mathbb{C}$ ? Wir werden im Laufe unserer Untersuchungen noch feststellen, dass

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

gewissermaßen die *einzig* „sinnvolle“ Fortsetzung der reellen Kosinusfunktion ins Komplexe liefert.

Die obigen Ausführungen lassen sich vielleicht kurz damit zusammenfassen, dass komplexe Analysis viele aufschlussreichen Einsichten in *a-priori* reelle Probleme geben kann und ein mächtiges Werkzeug darstellt, welches in keines Analytikers Werkzeugkoffer fehlen sollte. Das folgende berühmte Zitat bringt dieses Diktum sehr elegant auf den Punkt:

*„The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain.“*

— Jacques Hadamard

## Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
Kapitel 1. Komplexe Differenzierbarkeit	1
1.1. <i>Prélude</i> : Komplexe Zahlen	1
1.2. Komplexe Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit	6
1.3. Konforme Abbildungen	10
1.4. Potenzreihen	12
1.5. Die Exponentialfunktion	14
Kapitel 2. Komplexe Wegintegrale	21
2.1. Wege	21
2.2. Die Windungszahl	28
2.3. Lemma von Goursat und erste Anwendungen	32
2.4. Die Cauchysche Integralformel	38
Kapitel 3. Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel	41
3.1. Potenzreihendarstellung	41
3.2. Cauchysche Abschätzungen und Konsequenzen	43
3.3. Der Satz von Morera	45
3.4. Der Identitätssatz	45
3.5. Verhalten bei Nullstellen	48
3.6. Gebietstreue und Maximumprinzip	52
3.7. Isolierte Singularitäten	53
3.8. Laurentreihen	58
Kapitel 4. Analytische Fortsetzung	63
4.1. Die Garbe der Halme holomorpher Funktionskeime	63
4.2. Analytische Fortsetzung (abstrakt)	70
4.3. Hochheben von Wegen	74
4.4. Monodromiesatz	80
4.5. Existenz von Hochhebungen	81
4.6. Anwendungen	84
Kapitel 5. Der globale Satz von Cauchy	89
5.1. Der Satz von Cauchy für Zykel	90
5.2. Der Residuensatz	96

5.3. Anwendungen	99
5.4. Das Null- und Polstellen zählende Integral	102
5.5. Der Satz von Gauß–Lucas und eine Vermutung von Sendov	106
Kapitel 6. Folgen holomorpher Funktionen	111
6.1. Kompakte Konvergenz	111
6.2. Der Satz von Montel	113
Kapitel 7. Der Riemannsche Abbildungssatz	117
7.1. Der Satz und einordnende Besprechung	118
7.2. Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes	120
Kapitel 8. Interpolationsprobleme	125
8.1. Der Satz von Mittag-Leffler	125
8.2. Partialbruchzerlegung	127
8.3. Unendliche Produkte	129
8.4. Weierstraßscher Produktsatz	134
Anhang A. Übungsaufgaben	141
Literaturverzeichnis	163

## KAPITEL 1

### Komplexe Differenzierbarkeit

#### 1.1. Prélude: Komplexe Zahlen

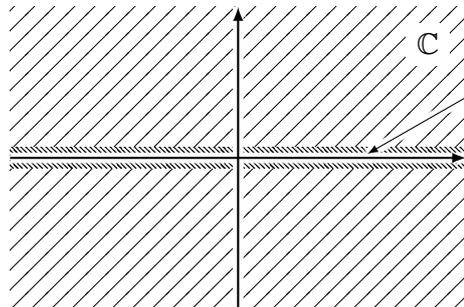
**1.1.1. Konstruktion der komplexen Zahlen.** Wir beginnen mit einer Wiederholung zu komplexen Zahlen. Der *Körper der komplexen Zahlen* sei definiert als die Menge  $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$  zusammen mit der üblichen (Vektor-)Addition

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad ((a, b), (x, y)) \mapsto (a + x, b + y) =: (a, b) + (x, y)$$

und Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad ((a, b), (x, y)) \mapsto (ax - by, bx + ay) =: (a, b) \cdot (x, y).$$

Man rechnet leicht — wenngleich aufwändig — nach, dass es sich hierbei um einen Körper handelt. Das zugehörige Eins- respektive Nullelement dieses Körpers ist gegeben durch  $1 = 1_{\mathbb{C}} := (1_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$  bzw.  $0 = 0_{\mathbb{C}} := (0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$ .



**Abbildung 1.** Schaubild der komplexen Zahlen als zweidimensionaler reeller Vektorraum mit dem Bild  $\iota(\mathbb{R})$  von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$ .

Bei der Abbildung  $\iota: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto (x, 0_{\mathbb{R}})$ , handelt es sich um einen injektiven<sup>1</sup> Körperhomomorphismus, vermöge dessen wir  $\mathbb{R}$  mit seinem Bild  $\iota(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$  identifizieren. In diesem Sinne verstehen wir jede reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$  auch als komplexe Zahl  $\iota(x) \in \mathbb{C}$ , schreiben aber auch  $x$  für  $\iota(x)$ . Diese Identifikation ist überdies auch in so weit mit der  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstruktur von  $\mathbb{C}$  verträglich, als dass es für den Wert von  $\lambda \cdot z$  mit  $\lambda \in \mathbb{R} \cong \iota(\mathbb{R})$  und  $z \in \mathbb{C}$  unerheblich ist, ob die Multiplikation als Skalarmultiplikation oder Multiplikation im Körper  $\mathbb{C}$  aufgefasst wird. Wir visualisieren diesen

<sup>1</sup>Wie man in der *Algebra* lernt, ist tatsächlich jeder Körperhomomorphismus automatisch injektiv.

Umstand anhand des nachstehenden kommutativen Diagramms:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\iota \times \text{id}_{\mathbb{C}}} & \iota(\mathbb{R}) \times \mathbb{C} \\
 \searrow \text{Skalarmultiplikation} & & \swarrow \text{Körpermultiplikation} \\
 & \mathbb{C} &
 \end{array}$$

**Bemerkung** (Kleinere Zahlensysteme). Die Identifikation von  $\mathbb{R}$  mit  $\iota(\mathbb{R})$  kennt die Leserin oder der Leser sicher bereits von Konstruktionen von  $\mathbb{Z}$  aus  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$  aus  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{Q}$ : Oft wird beispielsweise  $\mathbb{Q}$  als Menge von Tupeln ganzer Zahlen („Zähler“ und „Nenner“) modulo einer geeigneten Äquivalenzrelation konstruiert,<sup>2</sup> und ist somit streng genommen keine Obermenge von  $\mathbb{Z}$ . — Dennoch haben wir uns daran gewöhnt ganz ohne Skrupel „ $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ “ zu schreiben, und genauso schreiben wir auch hier  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Ferner schreiben wir  $i := (0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$  und für eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  sei  $-z$  die (eindeutig bestimmte) komplexe Zahl, welche nach Addition mit  $z$  das Nullelement liefert:  $z + (-z) = 0_{\mathbb{C}}$ . Analog sei  $z^{-1}$  durch  $z \cdot z^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$  definiert, sofern es sich bei  $z$  nicht um  $0_{\mathbb{C}}$  handelt. Wir gehen im Folgenden davon aus, dass alle Lesenden im Laufe ihres Studiums genügend Erfahrung mit Körpern gesammelt haben, um auch ohne Umstände Ausdrücke wie  $(2 + 6i)^{-4}$  oder  $\frac{3+i}{(1-8i)^{12}}$  zu interpretieren. Eine leichte Rechnung ergibt  $i^2 = (-i)^2 = -1$ . Die *Algebra* lehrt uns, dass  $i$  und  $-i$  algebraisch nicht unterscheidbar sind: Es gibt einen Körperautomorphismus  $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , welcher  $i$  auf  $-i$  abbildet; tatsächlich gibt es viele solcher Körperautomorphismen  $\sigma$ . Wenn man *zusätzlich* fordert, dass  $\sigma$  die reellen Zahlen punktweise fixiert, so gibt es tatsächlich genau ein solches  $\sigma$ , welches wir als **(komplexe) Konjugation**  $\bar{\cdot}$  bezeichnen.

Wir haben aber durch die obige Konstruktion eine der beiden<sup>3</sup> komplexen Zahlen  $z$  mit  $z^2 = -1$  (letztendlich willkürlich) *ausgewählt* und mit  $i$  bezeichnet. Der Körper der komplexen Zahlen ist auch ein zwei-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Als (geordnete) Basis wählen wir üblicherweise  $(1, i)$ . Bezüglich dieser Basis hat jede komplexe Zahl  $z$  eine eindeutige Darstellung als  $z = x + iy$  mit reellen<sup>4</sup> Zahlen  $x$  und  $y$ . Diese Basiswahl induziert einen Isomorphismus:

$$(1.1) \quad \mathbb{C} = \mathbb{R}1_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{R}i \cong \mathbb{R}^2 \quad (\text{als } \mathbb{R}\text{-Vektorräume}).$$

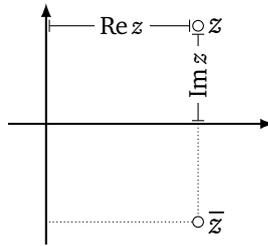
Wir nennen  $x$  den **Realteil von  $z$**  und  $y$  den **Imaginärteil von  $z$** . In Zeichen:  $x = \text{Re } z$  und  $y = \text{Im } z$ . Die komplexe Konjugation  $\bar{\cdot}$  wirkt bezüglich dieser Koordinatenwahl

<sup>2</sup>Diese Äquivalenzrelation trägt Uneindeutigkeiten wie  $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$  in der Bruchdarstellung Rechnung.

<sup>3</sup>Dass es sich bei  $z = \pm i$  um Nullstellen des Polynoms  $Z^2 + 1$  handelt, hatten wir schon gesehen. Mehr als zwei Nullstellen kann ein quadratisches Polynom über einem Körper — wie aus der *Algebra* bekannt — natürlich nicht haben.

<sup>4</sup>Im Folgenden schreiben wir des Öfteren  $z = x + iy$  und gehen stillschweigend davon aus, dass vom Lesenden implizit verstanden wird, dass es sich bei  $x$  und  $y$  um *reelle* Zahlen handeln soll.

als  $\overline{(x + iy)} = x - iy$ .



Eine kurze Rechnung in Koordinaten zeigt für  $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{(\bar{z})} = z, \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

sowie

$$z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff z = \bar{z}.$$

**1.1.2. Ordnung und algebraische Abgeschlossenheit.** Wir erinnern kurz an den Begriff des *angeordneten Körpers*, welcher einen Körper  $K$  mit einer ausgezeichneten Menge von *positiven Elementen*  $\mathcal{P} \subset K$  bezeichnet, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

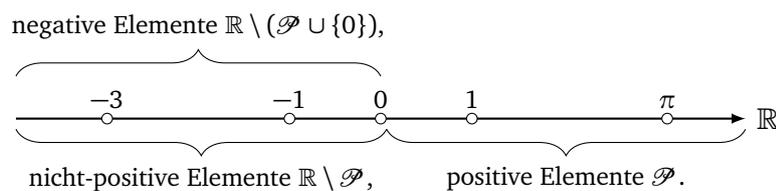
- (1) für jedes  $x \in K$  ist entweder  $x \in \mathcal{P}$ ,  $-x \in \mathcal{P}$ , oder  $x = 0_K$  (und jeder dieser Fälle schließt die anderen beiden aus),
- (2) für alle  $x, y \in \mathcal{P}$  gilt  $x + y \in \mathcal{P}$  und  $x \cdot y \in \mathcal{P}$ .

Für solche Körper definiert man eine totale Ordnungsrelation  $\leq$  durch

$$x \leq y \iff y - x \in \mathcal{P} \cup \{0_K\}.$$

Grob gesagt sind angeordnete Körper diejenigen, die Ungleichungen zwischen ihren Elementen zulassen.

**Beispiel.** Die reellen Zahlen bilden mit der bekannten Interpretation von „positiven Elementen“ einen angeordneten Körper. Ungleichungen wie  $\pi \leq 22/7$  lassen sich hier in sinnvoller Art und Weise erklären.



Die positiven reellen Zahlen haben auch eine rein algebraische Charakterisierung als diejenigen  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , die sich als  $x = y^2$  mit einem  $y \in \mathbb{R}$  schreiben lassen. Diese Tatsache hat interessante Konsequenzen; Es lässt sich hiermit beispielsweise zeigen, dass  $\operatorname{id}_{\mathbb{R}}$  der einzige Körperhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist. (Die analoge Aussage für  $\mathbb{C}$  ist hoffnungslos falsch. Für Details siehe die Vorlesung „Algebra“.)

Die Situation im Komplexen sieht anders aus:

**Proposition 1.1.** *Es gibt keine Wahl von  $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}$  derart, dass die komplexen Zahlen zusammen mit  $\mathcal{P}$  zu einem angeordneten Körper werden.*

*Beweis.* Man überlegt sich leicht anhand der Axiome, dass in einem angeordneten Körper  $K$  Quadrate  $\neq 0_K$  (d.h. Elemente der Form  $x^2$  für ein  $x \in K \setminus \{0_K\}$ ) stets positiv sind, denn für ein solches  $x \neq 0_K$  ist entweder  $x$  oder  $-x$  positiv und damit sicher in jedem Fall auch  $x^2 = (-x)^2$  als Produkt zweier positiver Elemente selbst positiv. Insbesondere ist  $1_K = 1_K^2$  stets positiv. Da in den komplexen Zahlen aber neben der Zahl 1 auch ihr additiv inverses Element  $-1 = i^2$  ein Quadrat ist, sieht man, dass es keine Möglichkeit gibt, eine Menge  $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}$  positiver Elemente zu wählen, welche  $\mathbb{C}$  zu einem angeordneten Körper macht.  $\square$

Das hat eine wichtige Konsequenz: Es gibt *keine* Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen. Gelegentlich sieht man zwar in Lehrbüchern auch Ausdrücke wie  $z > 0$  für eine (vermeintlich) komplexe Zahl  $z$ , jedoch ist dies oft als die Aussage „ $z$  ist reell und bezüglich der reellen Ordnungsstruktur positiv“ zu verstehen (siehe z.B. [10, Aufgabe 1 in § 10.5]).

Die Ordnungsstruktur der reellen Zahlen eröffnet die Möglichkeit für das folgende einfache Argument, dass das Polynom  $X^2 + 1$  keine reelle Nullstelle besitzt. In der Tat gilt nämlich für jedes  $x \in \mathbb{R}$  die Ungleichung  $x^2 \geq 0$  und daher  $x^2 + 1 > 0$ , also insbesondere  $x^2 + 1 \neq 0$ .

Der Verlust der Ordnungsstruktur beim Übergang von  $\mathbb{R}$  zu  $\mathbb{C}$  ist der Preis, den man für die Hinzunahme einer Nullstelle des obigen Polynoms zahlen muss. Im Gegenzug erkaufte man sich dadurch aber eine sehr schöne Eigenschaft, welche die komplexen Zahlen den reellen Zahlen in manchen Anwendungen überlegen macht:

**Satz 1.2** (Fundamentalsatz der Algebra). *Der Körper der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen, d.h. jedes Polynom  $P \in \mathbb{C}[Z]$  mit  $\text{Grad} \geq 1$  besitzt eine komplexe Nullstelle.*

**Bemerkung.** Überdies ist aus der Algebra bekannt, dass man zu gegebenem Polynom  $P \in \mathbb{C}[Z]$  mit Nullstelle  $z_0$  (mittels Division mit Rest) eine Produktdarstellung  $P = (Z - z_0) \cdot P_*$  mit einem Polynom  $P_*$  von kleinerem Grad als  $P$  gewinnen kann. Mittels Induktion folgt dann leicht, dass sich jedes Polynom  $P \in \mathbb{C}[Z]$  in der Form

$$P = c(Z - z_0)(Z - z_1) \cdots (Z - z_{\deg P - 1})$$

mit einem  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und (nicht notwendigerweise paarweise verschiedenen) Nullstellen  $z_0, z_1, \dots, z_{\deg P - 1}$  schreiben lässt und man kann sich auch überlegen, dass diese Darstellung (bis auf Vertauschung der Faktoren) eindeutig ist.

**1.1.3. Topologie.** Der **Betrag**  $|z|$  einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  ist definiert als

$$|z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und stimmt (unter Berufung auf (1.1)) offensichtlich mit der wohl-bekannteren *Euklid-Norm*

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

auf  $\mathbb{R}^2$  überein. (Man überlegt sich auch leicht, dass die komplexe Betragsfunktion  $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eingeschränkt auf  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  mit der reellen Betragsfunktion übereinstimmt.) Diese Zusatzstruktur macht  $\mathbb{C}$  zu einem *bewerteten Körper* und auch zu einem normierten  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Die von der Bewertungsstruktur bzw. Normstruktur induzierten Topologien auf  $\mathbb{C}$  stimmen überein. Durch  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $(z, z_0) \mapsto |z - z_0|$  wird eine Metrik auf  $\mathbb{C}$  gestiftet.

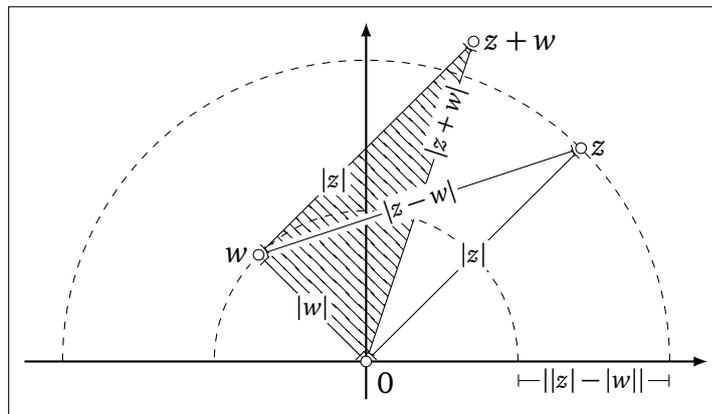
Wir erinnern — für  $z, w \in \mathbb{C}$  — an die wohlbekannte **Dreiecksungleichung**

$$|z + w| \leq |z| + |w|,$$

sowie die **umgekehrte Dreiecksungleichung**

$$|z - w| \geq ||z| - |w||.$$

(Vgl. Abbildung 2.)



**Abbildung 2.** Illustration zur Dreiecksungleichung und ihrer Umkehrung: (1) Eine Seite eines Dreiecks ist nie länger als die Summe der Längen der übrigen beiden Seiten und (2) nie kürzer als deren Differenz.

Wir notieren

$$B(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$$

für die **offene Kreisscheibe** mit Mittelpunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und Radius  $\delta \geq 0$ , sowie

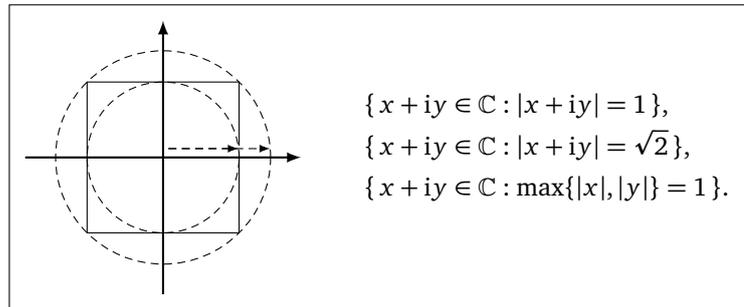
$$\bar{B}(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \delta\}$$

für die zugehörige **abgeschlossene Kreisscheibe**. Die Menge

$$\mathbb{D} = B(0, 1)$$

heißt **Einheitskreis(scheibe)**. Eine Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  heißt bekanntlich **offen**, falls es zu jedem Punkt  $z_0 \in U$  einen (i.Allg. von  $z_0$  abhängigen) Radius  $\delta > 0$  gibt derart, dass  $U$  die ganze Kreisscheibe  $B(z_0, \delta)$  enthält. Etwaige Leserinnen und Leser sollten mit den Grundbegriffen der Topologie (in metrischen Räumen) bereits vertraut sein (abgeschlossene Mengen, Stetigkeit, Kompaktheit, Konvergenz von Folgen, Cauchy-

Folgen, Vollständigkeit etc.) und wir verzichten auf eine weitere ausufernde Darlegung bekannter Definitionen.



**Abbildung 3.** Illustration zur Ungleichung (1.2).

Anhand der Ungleichungskette (siehe auch Abbildung 3)

$$(1.2) \quad \max\{|x|, |y|\} \leq |x + iy| \leq \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\}$$

sieht man unmittelbar, dass Konvergenz einer Folge  $(z_n)_n$  von komplexen Zahlen äquivalent zur (gleichzeitigen!) Konvergenz der zwei reellen Folgen  $(\operatorname{Re} z_n)_n$  und  $(\operatorname{Im} z_n)_n$  ist und sich auch eine analoge Bemerkung über Cauchy-Folgen ergibt. Zusammen mit der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  folgert man hieraus leicht die Vollständigkeit von  $\mathbb{C}$ :

**Proposition 1.3.**  $\mathbb{C}$  ist zusammen mit der durch  $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$  induzierten Topologie vollständig (d.h. jede Cauchy-Folge komplexer Zahlen konvergiert gegen einen Grenzwert in  $\mathbb{C}$ ).

## 1.2. Komplexe Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit

Es sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine beliebige Funktion. Wir nennen  $f$  **komplex-differenzierbar in  $z_0 \in G$** , falls der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert. Wir nennen  $f$  **holomorph auf  $G$** , falls  $f$  in jedem Punkt  $z_0 \in G$  komplex-differenzierbar ist.

Die aus dem Reellen bekannten Rechenregeln (d.h. Linearität, Produktregel, Kettenregel, Differenzieren von Umkehrfunktionen etc.) für das Differenzieren übertragen sich ohne große Schwierigkeiten auch ins Komplexe. Ebenso einfach beweist man, dass eine in  $z_0$  komplex-differenzierbare Funktion in  $z_0$  stetig ist.

### Beispiele.

- Die Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^{42}$ , ist holomorph. Es gilt  $f'(z_0) = 42z_0^{41}$  in jedem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$ .
- Jede Polynomfunktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto P(z)$ , mit Polynom  $P \in \mathbb{C}[Z]$  ist holomorph.

- Durch Potenzreihen definierte Funktionen sind im Inneren der Konvergenzkreisscheibe holomorph. (Für mehr Details hierzu siehe § 1.4.)
- Die komplexe Konjugation  $\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist nicht holomorph, ja gar in keinem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  komplex-differenzierbar:

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{R}}} \frac{\overline{(z_0 + \epsilon)} - \bar{z}_0}{\epsilon} = 1 \neq -1 = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{R}}} \frac{\overline{(z_0 + i\epsilon)} - \bar{z}_0}{i\epsilon}.$$

- $\operatorname{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \operatorname{Re}(z)$  ist in keinem Punkt  $z_0$  von  $\mathbb{C}$  komplex-differenzierbar, denn sonst wäre ja

$$\bar{\cdot} = 2\operatorname{Re} - \operatorname{id}_{\mathbb{C}} \quad (\forall z \in \mathbb{C}: \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) - z)$$

in  $z_0$  komplex-differenzierbar. (Für  $\operatorname{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ergibt sich ein analoges Argument.)

Vermöge unserer Identifikation (1.1) lässt sich  $G$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  auffassen und  $f$  nimmt die Gestalt einer vektorwertigen Funktion

$$\mathbb{R}^2 \supseteq G \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$

an. Etwas präziser lässt sich dieser Sachverhalt anhand des kommutativen Diagramms

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ x+iy \mapsto (x,y) \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathbb{R}^2 \supseteq \text{„}G\text{“} & \xrightarrow{\text{„}f\text{“}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

veranschaulichen. Die Anführungszeichen werden wir im Folgenden zumeist weglassen und die vertikalen Pfeile gedanklich zu Gleichheiten erheben. Der Sinn hinter dem Diagramm ist allerdings uns hier die verschiedenen Blickwinkel auf  $f$  klar vor Augen zu führen: den komplexen Blickwinkel (obere Zeile) und den reellen Blickwinkel (untere Zeile).

Es stellt sich somit die Frage, was komplexe Differenzierbarkeit mit (reeller) totaler Differenzierbarkeit gemein hat. Bekanntlich heißt eine Abbildung  $g: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  differenzierbar in  $z_0 \in G \subseteq \mathbb{R}^2$ , falls es eine (und dann nur eine) lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gibt derart, dass die durch die Gleichung

$$g(z_0 + v) = g(z_0) + L(v) + r(v)$$

definierte Funktion  $r: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Bedingung

$$\lim_{\substack{v \rightarrow (0,0) \\ v \neq (0,0)}} \frac{\|r(v)\|}{\|v\|} = 0$$

erfüllt, wobei

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (v_1, v_2) \longmapsto \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

die Euklid-Norm auf  $\mathbb{R}^2$  bezeichne. Anschaulich gesprochen bedeutet dies natürlich nichts Anderes, als dass sich  $g$  „in der Nähe von  $z_0$ “ gut durch eine lineare Abbildung approximieren lässt.

- Zunächst sei  $f$  als in  $z_0 \in G$  komplex-differenzierbar angenommen. Dann schreibt sich

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + \varrho(h),$$

mit  $\varrho(h) = f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h$ . Zusammen mit  $\varrho(z_0) = 0$  und

$$\varrho(h) = h \cdot \left( \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right) \quad (\text{für } h \neq 0)$$

sehen wir, dass  $h\varrho(h)$  für  $h \rightarrow 0$  gegen 0 konvergiert. (Man beachte, dass die Euklid-Norm von  $h \in \mathbb{C}$ , aufgefasst als Vektor in  $\mathbb{R}^2$ , nichts anderes als der Betrag von  $h$  als komplexe Zahl ist.) Beachtet man nun, dass Multiplikation mit  $f'(z_0)$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  stiftet, so sehen wir, dass  $f$  im Punkt  $z_0$  (reell) total differenzierbar ist.

Wir schreiben nun  $f'(z_0) =: a + ib$  und wollen die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$\text{mult}_{f'(z_0)}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad h \longmapsto f'(z_0)h = (a + ib)h$$

bezüglich der (geordneten)  $\mathbb{R}$ -Basis  $(1, i)$  von  $\mathbb{C}$  darstellen. Wegen

$$\text{mult}_{f'(z_0)}(x + iy) = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$$

schreibt sich  $\text{mult}_{f'(z_0)}$  bezüglich obiger Basis als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Wir veranschaulichen dies anhand des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{mult}_{f'(z_0)}} & \mathbb{C} \\ x+iy \mapsto (x,y) \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{v \mapsto Av} & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Betrachten wir nun  $f$  wie in (1.3) als vektorwertige Funktion in zwei Variablen, etwa

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

so stimmt die eben berechnete Matrix  $A$  mit der Jacobi-Matrix von  $f$  an der Stelle  $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  überein, also

$$\left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \hline \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die sogenannten **Cauchy–Riemannsches Differentialgleichungen**

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Schreibt man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y},$$

so lassen sich die obigen Differentialgleichungen auch in der etwas kompakteren Form

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

notieren.

- Man überlegt sich, dass man die eben geführten Überlegungen auch umdrehen kann: Sei  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  nun aufgefasst als Funktion von  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  (reell) total differenzierbar in einem Punkt  $z_0 = (x_0, y_0) \in G$  und erfüllen die partiellen Ableitungen von  $f$  in  $z_0$  die Cauchy–Riemannsches Differentialgleichungen, so ist  $f$  in  $z_0$  komplex-differenzierbar und es gilt

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Unsere bisherigen Überlegungen fassen wir in dem folgenden Resultat zusammen:

**Proposition 1.4.** *Sei  $G$  eine offene Teilmenge der komplexen Zahlen und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine beliebige Abbildung. Dann ist  $f$  genau dann holomorph in  $G$ , wenn  $f$  aufgefasst als Funktion von  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  in jedem Punkt von  $G$  (reell) total differenzierbar ist und die beiden partiellen Ableitungen von  $f$  den Cauchy–Riemannsches Differentialgleichungen genügen.*

**Beispiele.**

- Aus den Beispielen auf Seite 6 wissen wir bereits, dass weder die komplexe Konjugation  $x + iy \mapsto x - iy$ , noch die Realteilabbildung  $x + iy \mapsto x$ , noch die Imaginärteilabbildung  $x + iy \mapsto y$  komplex-differenzierbar sind. Dies sieht man auch sofort mittels Proposition 1.4, denn die hier betrachteten drei Abbildungen sind alle  $\mathbb{R}$ -linear mit Jacobi-Matrizen (bezüglich der Basiswahl  $(1, i)$  von  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{respektive} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und keine dieser Matrizen ist von der Form  $\begin{pmatrix} \Delta & -\square \\ \square & \Delta \end{pmatrix}$ .

- Es seien  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  beliebige Parameter. Dann wird durch

$$f(x + iy) = (Ax + By) + i(Cx + Dy)$$

eine Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gestiftet. Wir wollen untersuchen, für welche Parameterwahl diese Funktion im Punkt  $x_0 + iy_0$  komplex-differenzierbar ist. Eine kurze Rechnung liefert unmittelbar<sup>5</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A + iC = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B + iD = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}.$$

Die Cauchy–Riemannsches Differentialgleichungen fordern hier also

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \Delta & -\square \\ \square & \Delta \end{pmatrix}, \quad \text{also } A \stackrel{!}{=} D \quad \text{und} \quad C \stackrel{!}{=} -B.$$

Nimmt man nun  $A = D$  und  $C = -B$  an, so erhält man

$$f(x + iy) = (Ax - Cy) + i(Cx + Ay) = (A + iC)(x + iy),$$

also  $f = \text{mult}_{A+iC}$ .

- Die gleichen Überlegungen angewandt auf die durch

$$f_A(x + iy) = 4 - 4x + x^2 - y^2 + i(Ax^2 - 4y + 2xy).$$

gestiftete Funktion  $f_A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  zeigen, dass  $f_A$  genau dann in  $x_0 + iy_0$  komplex-differenzierbar ist, wenn  $Ax_0 = 0$  gilt. Insbesondere ist  $f_0$  holomorph auf  $\mathbb{C}$  und man kann  $f_0(z) = (z-2)^2$  nachrechnen. Betrachtet man (beispielsweise) hingegen  $f_3$ , so stellt man fest, dass diese Funktion nur in den Punkten auf der „imaginären Achse“  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = 0\}$  komplex-differenzierbar ist. (Siehe auch Abbildung 4.)

### 1.3. Konforme Abbildungen

Im vorherigen Abschnitt hatten wir uns überlegt, dass eine an einem Punkt (reell) total differenzierbare Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann in diesem Punkt komplex-differenzierbar ist, wenn die zugehörige Jacobi-Matrix die Form

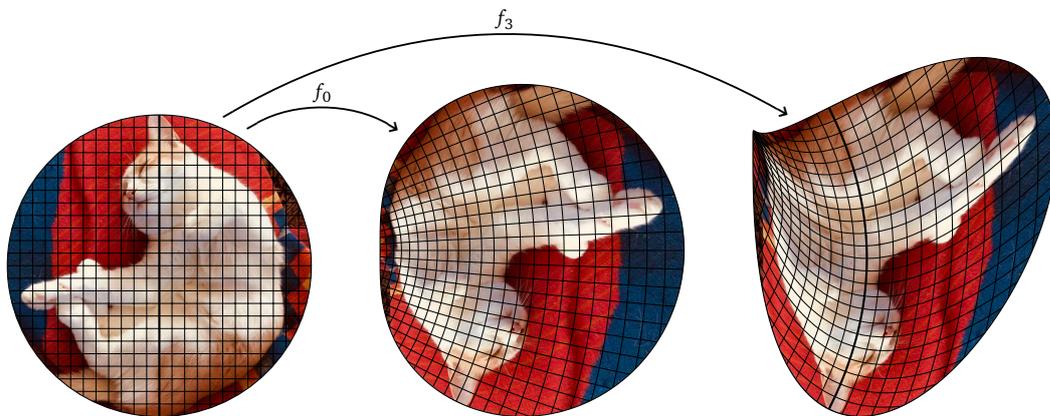
$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

hat. Zwar kommen wir erst etwas später (siehe § 1.5) auf *Polarkoordinaten* zu sprechen, doch sei hier dennoch darauf vertraut, dass man Matrizen des obigen Typus bereits aus der linearen Algebra als Darstellungsmatrizen von *Drehstreckungen* im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^2$  (mit dem Standardskalarprodukt) kennt. In der Tat schließt man aus der Tatsache, dass das Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle = a(-b) + ba = 0$$

<sup>5</sup> $f$  war hier offensichtlich  $\mathbb{R}$ -linear gewählt, weswegen man sich also nicht wundern braucht, dass die totale Ableitung (=Linearisierung) von  $f$  in jedem Punkt gleich aussieht.

der beiden Spalten von  $A$  verschwindet, dass beide Vektoren orthogonal sind und zusammen mit  $\det A = a^2 + b^2 \geq 0$  schließt man, dass es sich bei der linearen Abbildung  $v \mapsto Av$  tatsächlich um eine Drehstreckung (ohne Spiegelungsanteil) handelt. Man kann sich hierzu unter anderem überlegen, dass holomorphe Abbildungen überall dort, wo ihre Ableitung nicht verschwindet,<sup>6</sup> lokal sich schneidende Kurven auf Bildkurven abbilden, die sich unter demselben Winkel (mit derselben Orientierung) schneiden. Wir wollen auf dieses Phänomen für den Moment nicht weiter groß eingehen (insbesondere auch, weil hier sonst erst einige Begriffe formal eingeführt werden müssten) und begnügen uns mit der Betrachtung von Abbildung 4.



(a) Die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$  mit einem eingezeichneten engmaschigen Gitter, welche wir mit den Abbildungen  $f_0$  und  $f_3$  abbilden. Die Linie  $iy$  mit  $-1 < y < 1$  ist dick eingezeichnet.

(b)  $f_0(\mathbb{D})$ : Die Abbildung  $f_0 = (z \mapsto (z - 2)^2)$  ist holomorph mit nirgends auf  $\mathbb{D}$  verschwindender Ableitung. Das Bild des Gitters besteht (approximativ!) ebenfalls aus Quadraten:  $f_0$  sieht lokal wie eine Drehstreckung aus.

(c)  $f_3(\mathbb{D})$ :  $f_3$  ist nur in den Punkten  $iy \in \mathbb{D}$  komplex-differenzierbar; in der Umgebung dieser Punkte werden die eingezeichneten Quadrate auch wieder auf approximative Quadrate abgebildet, davon entfernt werden aus Quadraten allerdings (nicht-quadratische) Parallelogramme.

**Abbildung 4.** Illustration zum Abbildungsverhalten von  $f_A$  aus dem Beispiel von Seite 10: abgebildet wird jeweils der Einheitskreis.

<sup>6</sup>Man beachte: Bei Ableitungsnullstellen wird mit dem Faktor 0 gestreckt.

### 1.4. Potenzreihen

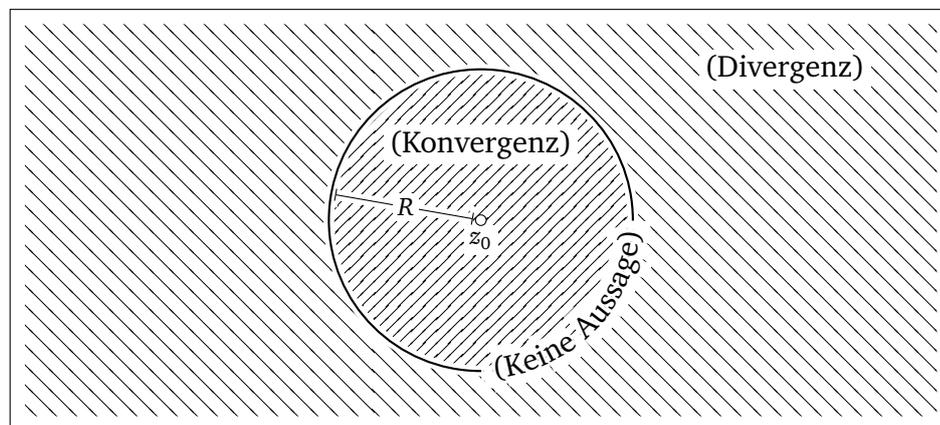
Wir erinnern hier an die aus der *Analysis 1* bekannten elementaren Eigenschaften zum Konvergenzverhalten von Potenzreihen

$$(1.4) \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (\text{mit } z, z_0, a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}).$$

In der Tat existiert für jede Potenzreihe (1.4) ein  $R \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  — der **Konvergenzradius** von (1.4) — mit der Eigenschaft, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \begin{cases} \text{konvergiert absolut} & \text{für } |z| < R, \\ \text{divergiert} & \text{für } |z| > R. \end{cases}$$

(Man beachte, dass über das Konvergenz-/Divergenzverhalten von (1.4) für  $|z| = R$  keine Aussage getroffen wird.)



**Abbildung 5.** Illustration zum Konvergenz- und Divergenzverhalten einer Potenzreihe  $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  um den Entwicklungspunkt  $z_0$  mit Konvergenzradius  $R$ .

Die Kreisscheibe  $B(z_0, R)$  heißt **Konvergenzkreis** der Potenzreihe (1.4) und (1.4) konvergiert in jeder kompakt in  $B(z_0, R)$  enthaltenen Menge gleichmäßig. Für den Konvergenzradius  $R$  gilt bekanntlich die **Formel von Cauchy–Hadamard**:

$$R = \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1},$$

wobei hier formal „ $1/0 = \infty$ “ zu verstehen ist, sofern der Limes Superior gleich Null ist.

Wir zeigen im Folgenden, dass Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreis holomorphe Funktionen stiften. Zur Vereinfachung nehmen wir — was wir selbstverständlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen —  $z_0 = 0$  an. Wir benötigen ein Lemma:

**Lemma 1.5.** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Ferner sei  $P \in \mathbb{C}[Z]$  ein beliebiges Polynom. Dann ist der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P(n) z^n$  mindestens so groß wie  $R$ .

*Beweis.* Die Behauptung folgt leicht aus der Formel von Cauchy–Hadamard zusammen mit dem bekannten Fakt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . Die Details seien den Leserinnen und Lesern zur Übung überlassen.  $\square$

**Satz 1.6.** Es sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist die so gestiftete Funktion  $f: B(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und für jedes  $z_0 \in B(0, R)$  gilt

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z_0^{n-1}.$$

(Hierin konvergiert die Potenzreihe rechter Hand selbstverständlich gemäß Lemma 1.5.)

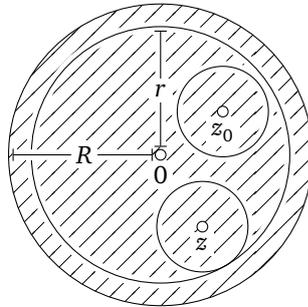
*Beweis.* Wir dürfen  $R \neq 0$  annehmen, da sonst nichts zu zeigen ist. Zu  $z, z_0 \in B(0, R)$  mit  $z \neq z_0$  betrachte man den Ausdruck

$$\Delta(z, z_0) = \frac{1}{z - z_0} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z_0^{n-1}.$$

Die Aussage des Satzes ist offenbar bewiesen, wenn wir

$$(1.5) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \Delta(z, z_0) = 0$$

zeigen können. Natürlich genügt es, (1.5) unter der zusätzlichen Annahme zu zeigen, dass  $z, z_0 \in B(0, r)$  für ein  $r < R$  sind:



Vermöge der Identität (vgl. Abbildung 6)

$$(1.6) \quad z^n - z_0^n = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}$$

folgt man mittels bekannten Rechenregeln für konvergente Reihen

$$\Delta(z, z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z_0^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (z^k z_0^{n-1-k} - z_0^{n-1}).$$

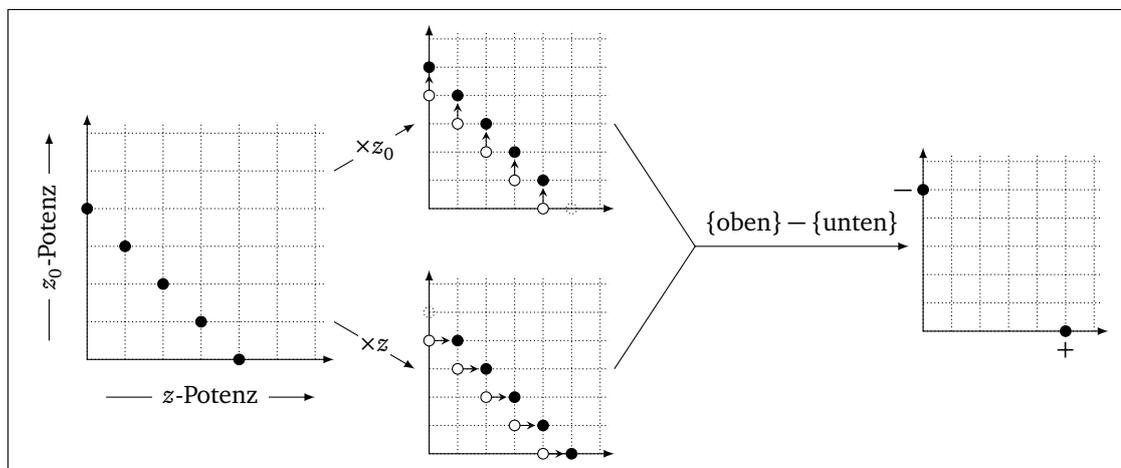
Eine erneute Anwendung von (einer Variante von) (1.6) zeigt nun

$$\Delta(z, z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (z - z_0) \sum_{\ell=0}^{k-1} z^\ell z_0^{n-2-\ell},$$

und triviales Abschätzen mittels der Dreiecksungleichung liefert daraufhin

$$|\Delta(z, z_0)| \leq |z - z_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n(n-1) r^{n-2},$$

was für  $z \rightarrow z_0$  gegen Null konvergiert. Das zeigt (1.5).  $\square$



**Abbildung 6.** Illustration zu der Identität (1.6) (die sich leicht durch Ausmultiplizieren der rechten Seite und eine Indexverschiebung zeigen lässt): Zu Grunde liegt das bekannte Phänomen von *Teleskopsummen*.

**Bemerkung.** Da die Ableitung einer Potenzreihe gemäß Satz 1.6 insbesondere auch selbst wieder durch eine Potenzreihe (mit mindestens genau so großem Konvergenzradius) gegeben ist, ergibt sich, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius beliebig oft (komplex-)differenziert werden dürfen. Tatsächlich wird sich noch herausstellen, dass holomorphe Funktionen stets unendlich oft komplex-differenzierbar sind (siehe Korollar 3.3).

### 1.5. Die Exponentialfunktion

Wir definieren wie in der *Analysis 1*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

und man sieht leicht, dass diese Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  absolut konvergiert. In ganz analoger Art und Weise setzen wir

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{und} \quad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Dann gilt

$$(1.7) \quad \exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z).$$

Für reelle  $y$  haben wir insbesondere die Beziehungen

$$\cos(y) = \operatorname{Re}(\exp(iy)) \quad \text{und} \quad \sin(y) = \operatorname{Im}(\exp(iy)).$$

(Achtung: Für komplexe  $y$  müssen die obigen Beziehungen i.Allg. nicht richtig bleiben.)

**Satz 1.7** (Eigenschaften der Exponentialfunktion).

- (1) Für  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt  $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ .
- (2) Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  ist  $\exp(z) \neq 0$ .
- (3)  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph und es gilt  $\exp' = \exp$ .
- (4)  $\exp|_{\mathbb{R}}$  ist reellwertig, positiv, streng monoton wachsend und erfüllt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty, \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0.$$

- (5) Die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $y \mapsto \exp(iy)$  bildet auf den Einheitskreisrand  $\partial \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  ab.
- (6) Es existiert eine kleinste positive reelle Zahl  $\pi$  mit  $\exp(\pi i/2) = i$  und genau dann ist  $\exp(z) = 1$ , wenn  $z$  von der Form  $z = 2\pi i k$  mit einem  $k \in \mathbb{Z}$  ist.
- (7)  $\exp$  ist eine periodische Funktion mit Periode  $2\pi i$ , d.h. für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt  $\exp(z) = \exp(z + 2\pi i)$ .
- (8) Ist  $w \neq 0$  eine komplexe Zahl, so ist  $w = \exp(z)$  für ein geeignetes  $z \in \mathbb{C}$ .

*Beweis.*

- (1) Die absolute Konvergenz der relevanten Reihen rechtfertigt die Bildung des Cauchy-Produkts in der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} \exp(z)\exp(w) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} w^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \\ &= \exp(z+w). \end{aligned}$$

- (2) Wegen (1) gilt insbesondere  $1 = \exp(0) = \exp(z + (-z)) = \exp(z)\exp(-z)$ . Das zeigt (2).

- (3) Die Holomorphie von  $\exp$  folgt schon aus Satz 1.6. Zur Bestimmung von  $\exp'$  benutzt man (1):

$$\begin{aligned}\exp'(z) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} = \exp(z) \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &= \exp(z) \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} h^{n-1} = \exp(z).\end{aligned}$$

- (4) Offensichtlich ist  $\exp(x) \in \mathbb{R}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und wegen  $\exp(0) = 1 > 0$  und (2) folgt mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass  $\exp = \exp'$  stets positiv ist. Das zeigt, dass  $\exp$  streng monoton wachsend ist. Ferner folgt aus der Definition von  $\exp$  direkt  $\exp(x) \geq 1 + x$  für alle reellen  $x \geq 0$  und somit auch  $\exp(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ . Wegen  $\exp(x)\exp(-x) = 1$  ergibt sich dann auch  $\exp(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow -\infty$ , und somit (4).
- (5) Da es sich bei der komplexen Konjugation  $\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  um eine stetige Funktion handelt, gilt für  $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\overline{\exp(iy)} &= \overline{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (iy)^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (iy)^n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (-iy)^n = \exp(-iy).\end{aligned}$$

Darum ist

$$|\exp(iy)|^2 = \exp(iy) \overline{\exp(iy)} = \exp(iy) \exp(-iy) = \exp(0) = 1,$$

also  $\exp(iy) \in \partial \mathbb{D}$ .

- (6), (7) Unter Berufung auf die Kettenregel und (3), liefert Differenzieren von (1.7) unmittelbar

$$\cos'(z) + i \sin'(z) = i \exp(iz) = i(\cos(z) + i \sin(z)),$$

also

$$\cos' = -\sin \quad \text{und} \quad \sin' = \cos.$$

Aus der Definition des Cosinus folgt unmittelbar  $\cos(0) = 1$ . Wir betrachten nun  $\cos(2)$ . Man überlegt sich leicht, dass wegen dem Alternieren und im Betrage nach monotonen Fallen der Glieder in der Definition des Cosinus

sich folgende Abschätzung ergibt:<sup>7</sup>

$$\cos(2) \leq \sum_{n=0}^2 \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} 2^2 + \frac{1}{4!} 2^4 = -\frac{1}{3} < 0.$$

Der Zwischenwertsatz liefert nun die Existenz (mindestens) einer Nullstelle von  $\cos|_{[0,2]}$ . Wir wählen hiervon diejenige mit kleinstem Betrag und bezeichnen sie mit  $\pi/2$ . Da  $\exp(i\pi/2) = i \sin(\pi/2)$  gemäß (5) Betrag 1 hat, ist  $\sin(\pi/2) = \pm 1$ . Wegen  $\sin(0) = 0$  und  $\sin'(y) = \cos(y) > 0$  für  $y \in [0, \pi/2)$  gilt die vorherige Gleichung mit „+“, d.h.  $\sin(\pi/2) = 1$ , also  $\exp(i\pi/2) = i$ . Weiterhin folgt mittels (1) für jedes  $k \in \mathbb{Z}$

$$\exp(2\pi ik) = (\exp(i\pi/2))^{4k} = i^{4k} = (-1)^{2k} = 1.$$

Daraus folgt tatsächlich auch schon (7):<sup>8</sup>

$$\exp(z + 2\pi ik) = \exp(z) \exp(2\pi ik) = \exp(z).$$

Sei nun  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $\exp(z) = 1$  gegeben. Dann folgt leicht  $x = 0$ . Es gilt  $y \in 2\pi\mathbb{Z}$  nachzuweisen. Wegen (1) genügt es den Fall  $0 < y < 2\pi$  auszuschließen. Sei also  $y$  im eben genannten Bereich. Selbstverständlich ist  $1 = (\exp(iy/4))^4$ , also  $\exp(iy/4)$  eine Nullstelle des Polynoms  $Z^4 - 1$ . Die vier Nullstellen dieses Polynoms sind  $\pm 1$  und  $\pm i$ . Wegen  $y/4 \in (0, \pi/2)$  ist aber  $\operatorname{Re} \exp(iy/4) = \cos(y/4) \in (0, 1)$ , im Widerspruch zu  $\exp(iy/4) \in \{\pm 1, \pm i\}$ .

- (8) Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Aus (4) und dem Zwischenwertsatz folgert man leicht, dass es ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) = |w| > 0$  gibt. Setze  $w_0 = w/|w| \in \partial\mathbb{D}$ . Gibt es ein  $y \in \mathbb{R}$  mit  $\exp(iy) = w_0$ , so haben wir wegen (1) natürlich  $\exp(x + iy) = w$ , wie gewünscht.

Schreibe darum nun  $w_0 = x_0 + iy_0$ . Wegen  $1 = |w_0|^2 = x_0^2 + y_0^2$  ist  $-1 \leq x_0 \leq 1$ . Dank  $\cos(0) = 1$  und

$$\cos(\pi) = \operatorname{Re}(\exp(\pi i)) = \operatorname{Re}(\exp(i\pi/2)^2) = \operatorname{Re}(i^2) = -1$$

liefert der Zwischenwertsatz die Existenz eines  $y \in [0, \pi]$  mit  $\cos(y) = x_0$ . Dann ist

$$\cos(y)^2 + \sin(y)^2 = |\exp(iy)|^2 = 1 = x_0^2 + y_0^2 = \cos(y)^2 + y_0^2,$$

also  $\sin(y)^2 = y_0^2$  und somit  $\sin(y) = \pm y_0$ . Gilt hierin Gleichheit mit „+“, so haben wir offenbar  $\exp(iy) = w_0$  und sind fertig. Anderenfalls ersetze

<sup>7</sup>Man erhält hier eine obere Abschätzung, da man die Reihendarstellung nach einem *geraden* Index abschneidet. Abschneiden nach einem ungeraden Index würde eine untere Abschätzung liefern, was uns hier aber nicht zu kümmern braucht; Eine derartige Einschachtelung des Reihengrenzwertes ist im Übrigen die Grundlage des bekannten *Leibnizschen Konvergenzkriteriums*.

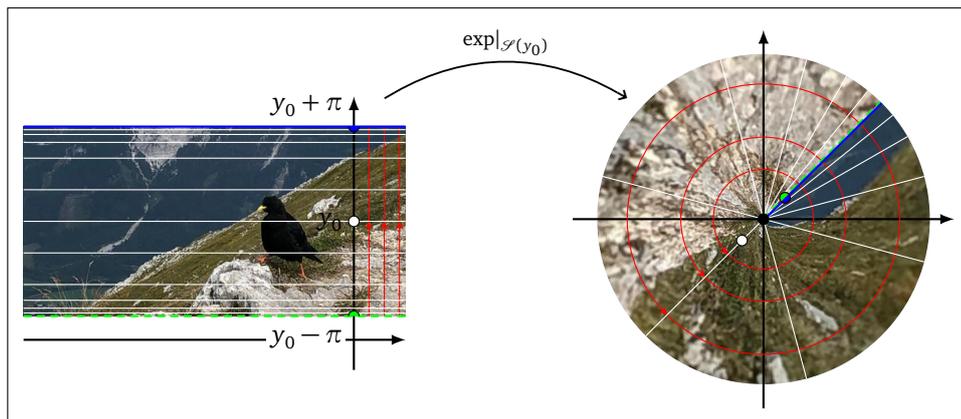
<sup>8</sup>Aus dem (hier gleich noch zu beweisenden) Zusatz in (6) kann man sich auch überlegen, dass jede andere Periode von  $\exp$  von der Form  $2\pi ik$  mit einem  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ist. In diesem Sinne ist  $\pm 2\pi i$  also auch die „minimale Periode“ von  $\exp$ . — Wegen Proposition 1.1 ist hier allerdings sprachlich etwas Vorsicht geboten.

man  $y$  durch  $-y$ . Da die Funktion  $\cos|_{\mathbb{R}}$  — mit Blick auf ihre Potenzreihendarstellung — gerade ist, ändert das den Wert  $\cos(y)$  nicht, während  $\sin(y) = -w_0$  zu  $-\sin(y) = w_0$  übergeht, da  $\sin|_{\mathbb{R}}$  ungerade ist (wieder mit Blick auf die Potenzreihendarstellung).

Damit sind alle Behauptungen des Satzes bewiesen.  $\square$

Die  $2\pi i$ -Periodizität von  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  zeigt insbesondere, dass — im Gegensatz zu  $\exp|_{\mathbb{R}}$  — die komplexe Exponentialfunktion nicht injektiv ist. Diese Kuriosität verkompliziert die Situation mit Logarithmen: Man beachte, dass im Reellen die Logarithmusfunktion  $\log: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  als Umkehrfunktion der bijektiven Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ,  $x \mapsto \exp(x)$  definiert ist; Im Komplexen ist hier Vorsicht geboten!

Satz 1.7 zeigt insbesondere, dass  $\exp(z) = \exp(w)$  genau für  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$  und  $\operatorname{Im}(z - w) \in 2\pi i\mathbb{R}$  gilt. Man sieht also, dass, zu fixiertem  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\exp$  den Streifen  $\mathcal{S}(y_0) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in (y_0 - \pi, y_0 + \pi]\}$  injektiv auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  abbildet. Dies ermöglicht die Definition der komplexen Logarithmusfunktion  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{S}(y_0)$  als Umkehrfunktion von  $\exp|_{\mathcal{S}(y_0)}: \mathcal{S}(y_0) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Die erhaltene Funktion hängt natürlich von  $y_0$  ab (wie man schon am Zielbereich erkennt). Konventionsgemäß setzt man  $y_0 = 0$  und nennt die erhaltene Logarithmusfunktion — die man häufig mit „Log“ notiert — auch **Hauptzweig des komplexen Logarithmus**.



**Abbildung 7.** Illustration zum Abbildungsverhalten von  $\exp|_{\mathcal{S}(y_0)} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Der Streifen  $\mathcal{S}(y_0)$  wird bijektiv auf die gelochte komplexe Zahlenebene  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  abgebildet.

Ein **Argument** einer komplexen Zahl  $z \neq 0$  ist ein  $y \in \mathbb{R}$  mit  $\exp(iy) = z/|z|$ . Dieses ist, wie Satz 1.7 zeigt, nur bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi i$  wohlbestimmt. Wir schreiben  $\operatorname{Arg}(z)$  für dasjenige Argument von  $z \neq 0$  mit  $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$  und sprechen hier einfach von *dem* Argument von  $z$ . Offensichtlich gilt dann

$$\operatorname{Log}(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}),$$

wobei „log“ die aus der reellen Analysis bekannte Logarithmusfunktion bezeichne.

**Beispiel.** Durch die (jedenfalls schon aus der Schule von Analysis 1 bekannten) Additionstheoreme für Sinus und Cosinus lassen sich bekanntlich algebraische Ausdrücke für Sinus und Cosinus an gewissen rationalen Vielfachen von  $\pi$  herleiten. Derartige Überlegungen können beispielsweise benutzt werden, um die folgende Identität nachzuweisen:  $\text{Log}(1 + i\sqrt{3}) = \log 2 + i\pi/3$ .

Für jede komplexe Zahl  $z \neq 0$  haben wir

$$z = \exp(\text{Log}(z)) = \exp(\log|z| + i\text{Arg}(z)) = |z| \exp(i\text{Arg}(z)).$$

Dies ist die bekannte **Polarkoordinatendarstellung** komplexer Zahlen. Die Polarkoordinatendarstellung ermöglicht das Ziehen beliebiger Wurzeln:

**Korollar 1.8** (Existenz  $n$ -ter Wurzeln). *Für jedes  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $n \in \mathbb{N}$  hat das Polynom  $Z^n - a$  über  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Nullstellen, nämlich*

$$z_k = \exp(\text{Log}(a)/n) \zeta_n^k \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n \quad \text{mit } \zeta_n = \exp(2\pi i/n).$$

*Beweis.* Wir berufen uns erneut auf die aus der Algebra bekannte Tatsache, dass ein Polynom  $n$ -ten Grades über einem Körper höchstens  $n$  Nullstellen besitzt. Es verbleibt also lediglich noch zu verifizieren, dass die im Korollar ausgewiesenen Zahlen  $z_k$  tatsächlich Nullstellen von  $Z^n - a$  sind und diese paarweise verschieden sind. Zur Nullstellen-Eigenschaft (siehe Satz 1.7):  $z_k^n = \exp(\text{Log}(a)) \exp(2\pi i k) = a$ . Zur paarweisen Verschiedenheit: Es ist nur einzusehen, dass  $\zeta_n^k \neq \zeta_n^\ell$  für  $k, \ell \in \{1, 2, \dots, n\}$  nur im Fall  $k = \ell$  gilt. Hierzu gehen wir von der Gleichung  $\zeta_n^k \neq \zeta_n^\ell$ . Ohne Einschränkung sei  $k \geq \ell$ . Division der linken Seite durch die rechte liefert dann  $\zeta_n^{k-\ell} = 1$  und Satz 1.7 (6) zeigt die Ganzzahligkeit von  $(k-\ell)/n$ . Wegen  $1 \leq \ell \leq k \leq n$  folgt hieraus  $k = \ell$ , wie gewünscht.  $\square$



## KAPITEL 2

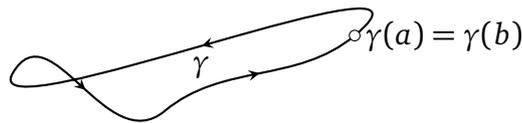
### Komplexe Wegintegrale

#### 2.1. Wege

Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein **Weg (in  $X$ )** ist eine stetige Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  von einem kompakten Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  nach  $X$ :

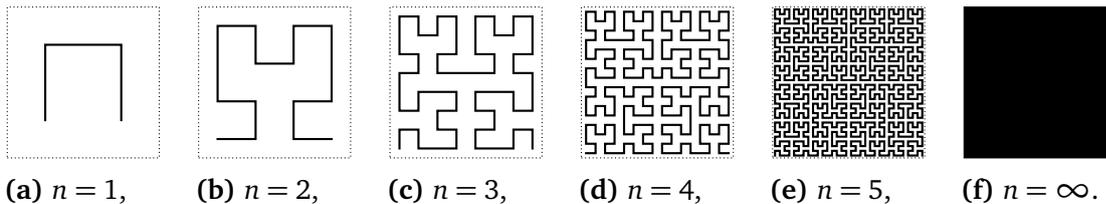


Der Weg  $\gamma$  heißt **geschlossen**, falls  $\gamma(a) = \gamma(b)$  gilt:



Wir werden im Folgenden vornehmlich den Fall betrachten, wenn  $X$  eine Teilmenge von  $\mathbb{C}$  ausgestattet mit der Teilraumtopologie ist.

Wege können im Allgemeinen sehr kompliziert sein: So konstruierte beispielsweise Peano erstmalig einen Weg, dessen Bildmenge aus einem Quadrat besteht. Abbildung 8 illustriert die Konstruktion eines derartigen Weges (aber nicht die Originalkonstruktion von Peano).



**Abbildung 8.** Veranschaulichung der Konstruktion von Hilbert eines Weges  $\gamma_\infty$ , dessen Bildmenge ein Quadrat füllt. Der fragliche Weg wird als Grenzfunktion einer Folge von Hilfswegen  $\gamma_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) gewonnen.

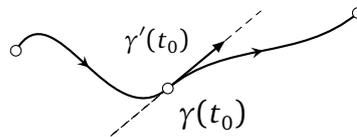
Eingeschüchtert durch derartig exotische Wege, fordern wir für den Moment lieber etwas mehr an die von uns betrachteten Wege, um schwierigen Situationen

„aus dem Weg zu gehen.“ Wir nennen  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  **differenzierbar in  $t_0 \in [a, b]$** , wenn der Grenzwert

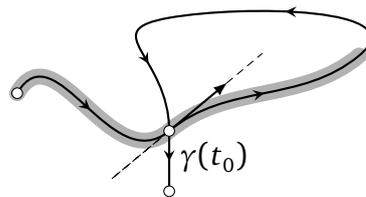
$$\gamma'(t_0) := \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in [a, b] \setminus \{t_0\}}} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

existiert. Der Weg  $\gamma$  heißt **differenzierbar**, falls  $\gamma$  in jedem Punkt  $t_0$  von  $[a, b]$  differenzierbar ist, und **stetig differenzierbar**, falls  $\gamma$  differenzierbar ist und die Abbildung  $\gamma': [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist. (Prinzipiell können auch stetig differenzierbare Wege noch sehr kompliziert aussehen. Bei gutwilliger Interpretation sieht man etwa in Abbildung 33 auf Seite 118 ein Beispiel dafür.)

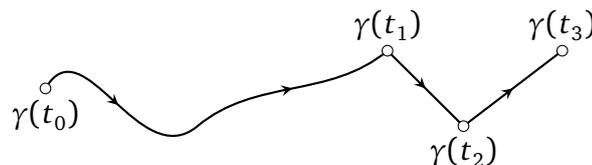
Differenzierbarkeit eines Weges in einem Punkt  $t_0$  hat offensichtlich die geometrische Bedeutung, den Weg  $\gamma|_{(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)} \rightarrow \mathbb{C}$  (für  $\epsilon > 0$  hinreichend klein) in einer Umgebung von  $\gamma(t_0)$  linearisieren zu können:



Die Einschränkung auf  $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$  soll hier etwaige Pathologien mit Selbstüberschneidungen vermeiden (hat aber sonst keine weitere Bewandnis):



Später wird es günstig sein etwas mehr Freiheit bei der Wahl von Wegen zu haben. Darum nennen wir  $\gamma$  **stückweise stetig differenzierbar**, falls es eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  von  $[a, b]$  gibt derart, dass jeder Teilweg  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  (für  $k = 1, \dots, n$ ) stetig differenzierbar ist:



Stückweise stetig differenzierbare Wege nennen wir auch kurz **Integrationswege**.

Die **Spur**  $\text{tr}(\gamma)$  eines Weges  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ist das Bild

$$\text{tr}(\gamma) := \gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}.$$

(Achtung: In den vielen hier vorkommenden Abbildungen ist selbstverständlich eher  $\text{tr}(\gamma)$  als  $\gamma$  gezeichnet, obwohl  $\gamma$  natürlich mehr Information enthält als  $\text{tr}(\gamma)$ . Wir deuten dies durch das Notieren von Richtungspfeilen  $\curvearrowright$  an.)

Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen. Für eine stetige Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  und einen stetig differenzierbaren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  in  $U$  definieren wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re}(\dots) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(\dots) dt,$$

wobei die Punkte für den Integranden  $f(\gamma(t))\gamma'(t)$  stehen. Ist  $\gamma$  nur stückweise stetig differenzierbar, so kann man  $\gamma'$  an etwaigen Stellen, wo es nicht definiert ist, durch einen beliebigen Wert fortsetzen und  $\int_{\gamma} f(z) dz$  wie oben erklären. (Bekanntlich „spürt“ das hier benutzte Riemann- oder Lebesgue-Integral die Änderung seines Integranden an endlich vielen Punkten nicht.) Sind  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  wie oben, so hat man insbesondere auch die Zerlegung

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}} f(z) dz,$$

wobei die Wege auf der rechten Seite natürlich auf ihrem gesamten Parameterintervall stetig differenzierbar sind.

**Bemerkung.** Der soeben definierte Integralbegriff ist  $\mathbb{C}$ -linear im Integranden (siehe Aufgabe 2.3).

**Bemerkung 2.1.** Wir beschränken uns in Beweisen im Folgenden des Öfteren auf den Fall stetig differenzierbarer Wege, formulieren die Sätze aber stets für Integrationswege. Die Verallgemeinerung der gegebenen Beweise erfolgt in der Regel leicht durch die Zerlegung  $\int_{\gamma} = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}}$ .

Bei unserem Integralbegriff haben wir nicht behauptet, dass  $\int_{\gamma}$  nur eine Funktion von  $\operatorname{tr}(\gamma)$  sei. — Die Art wie  $\operatorname{tr}(\gamma)$  von  $\gamma$  durchlaufen wird kann durchaus den Wert des Integrals beeinflussen. Es ist dennoch manchmal praktisch zu wissen, dass eine Umparametrisierung eines Weges keinen nennenswerten Einfluss auf das Wegintegral hat:

**Proposition 2.2.** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Integrationsweg in  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Ferner sei  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  eine bijektive, streng monotone, stückweise stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \pm \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz,$$

mit Vorzeichen „ $\pm$ “ je nachdem, ob  $\varphi$  streng monoton steigend (+) oder fallend (–) ist.

*Beweis.* Wir beschränken uns auf den Fall, dass  $\gamma$  sogar stetig differenzierbar ist (siehe Bemerkung 2.1). Sei  $\varphi$  zunächst streng monoton *steigend*. Dann ist

$$(2.1) \quad \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\varphi(t))) \cdot (\gamma \circ \varphi)'(t) dt$$

$$(2.2) \quad = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f \circ \gamma)(\varphi(t)) \cdot \gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

$$= \int_a^b (f \circ \gamma)(\theta) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = \int_{\gamma} f(z) dz,$$

wobei sich die letzte Gleichheit durch Aufteilen des Integrals in Real- und Imaginärteils und Anwenden der reellen Substitutionsregel ergibt.

Ist  $\varphi$  hingegen streng monoton *fallend*, so ist in der obigen Rechnung lediglich der Übergang von (2.1) auf (2.2) durch

$$\dots = \int_{\alpha}^{\beta} = \int_{\varphi^{-1}(b)}^{\varphi^{-1}(a)} = - \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \dots$$

zu ersetzen, wodurch sich das negative Vorzeichen einschleicht.  $\square$

**Proposition 2.3.** *Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Integrationsweg in einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann ist*

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

*Insbesondere gilt für geschlossene Integrationswege  $\gamma$  stets*

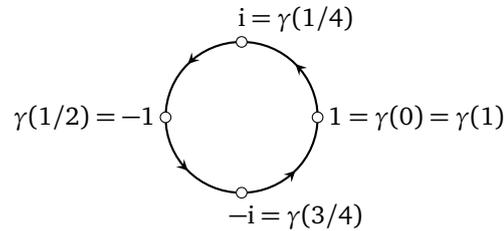
$$\int_{\gamma} F'(z) dz = 0.$$

*Beweis.* Wir beschränken uns abermals auf den Spezialfall, dass  $\gamma$  sogar stetig differenzierbar ist (siehe erneut Bemerkung 2.1). Es ist

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

wobei sich die letzte Gleichheit durch Aufteilen des Integrals in Real- und Imaginärteils und Anwenden des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ergibt.  $\square$

**Beispiel 2.4.** Zu  $n \in \mathbb{Z}$  betrachten wir die Funktion  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n$  und den Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \exp(2\pi it)$ :



- (1) Für  $n \neq -1$  ist  $F: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{n+1}z^{n+1}$  eine Stammfunktion von  $f$  (d.h.  $F' = f$ ). Da  $\gamma$  geschlossen ist, liefert Proposition 2.3

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0.$$

- (2) Für  $n = -1$  versagt die obige Konstruktion (beachte den hier nicht definierten Bruch „ $\frac{1}{n+1}$ “); Dennoch lässt sich das fragliche Integral durch eine direkte Rechnung bestimmen:

$$\int_{\gamma} z^{-1} dz = \int_0^1 \frac{2\pi i \exp(2\pi it)}{\exp(2\pi it)} dt = \int_0^1 2\pi i dt = 2\pi i.$$

**Korollar 2.5.** Es gibt keine auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorphe Funktion  $F$  mit  $F'(z) = 1/z$ .

*Beweis.* Anderenfalls wäre das Integral  $\int_{\gamma} z^{-1} dz = 2\pi i$  aus Beispiel 2.4 gemäß Proposition 2.3 gleich 0.  $\square$

**Bemerkung.** Man kann Korollar 2.5 einerseits als Eigenschaft der Funktion  $\mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto 1/z$ , betrachten, keine Stammfunktion zu besitzen. Umgekehrt kann man dies aber auch als eine topologisch-analytische Eigenschaft der gelochten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  auffassen, auf sich definierte holomorphe Funktionen ohne Stammfunktion zu besitzen. So gibt es beispielsweise offene Mengen  $U \subseteq \mathbb{C}$ , welche die eben beschriebene Eigenschaft nicht haben (siehe etwa Satz 2.14).

**Lemma 2.6** (M–L-Abschätzung). Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein Integrationsweg in einer Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \text{tr}(\gamma)} |f(z)| \times L(\gamma).$$

mit der **Länge**  $L(\gamma)$  von  $\gamma$ , gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

*Beweis.* Wir führen den Beweis nur für stetig differenzierbare Wege  $\gamma$  (siehe Bemerkung 2.1). Eine technische Schwierigkeit besteht darin, dass die Betragsbildung in

$$I := \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right|$$

sowohl Real- wie auch vom Imaginärteil des fraglichen Integrals verbindet. Um unsere Konzentration auf nur eine Zahl einschränken zu können, bedienen wir uns eines Tricks: Aus Satz 1.7 folgert man die Existenz einer komplexen Zahl  $\xi \in \partial \mathbb{D}$  mit

$$\mathbb{R} \ni I = \xi \int_{\gamma} f(z) dz = \left\{ \operatorname{Re} \int_a^b + i \operatorname{Im} \int_a^b \right\} \xi f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil sehen wir

$$I = \int_a^b \operatorname{Re}[\xi f(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt$$

Bei dem letzten Integral handelt es sich um ein gewöhnliches reelles Integral und wir erhalten

$$I \leq \int_a^b |\operatorname{Re}[\xi f(\gamma(t)) \gamma'(t)]| dt.$$

Die Behauptung erhält man nun, indem man den Integranden hierin wie folgt abschätzt:

$$|\operatorname{Re}[\xi f(\gamma(t)) \gamma'(t)]| \leq |\xi f(\gamma(t)) \gamma'(t)| = \max_{z \in \operatorname{tr}(\gamma)} |f(z)| \times |\gamma'(t)|. \quad \square$$

Der Ausdruck  $L(\gamma)$  hat eine geometrische Interpretation als *Länge der Spur* von  $\gamma$ . Diese Tatsache sollte aus der Analysis (im Rahmen der Theorie der Kurven im  $\mathbb{R}^n$ ) bekannt sein. Wir frischen die Erinnerung daran lediglich anhand einiger Beispiele auf:

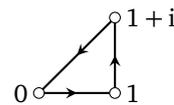
### Beispiele 2.7.

- (1) Es sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  der durch  $t \mapsto \exp(2\pi it)$  gegebene Weg (siehe Beispiel 2.4). Dann ist

$$L(\gamma) = \int_0^1 |2\pi i \exp(2\pi it)| dt = \int_0^1 2\pi dt = 2\pi.$$

- (2) Wir betrachten den Weg  $\gamma: [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & \text{falls } 0 \leq t < 1, \\ 1 + i(t-1) & \text{falls } 1 \leq t < 2, \\ (3-t)(1+i) & \text{falls } 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$



Hier ergibt sich

$$L(\gamma) = \int_0^1 |1| dt + \int_1^2 |i| dt + \int_2^3 |-1-i| dt = 1 + 1 + \sqrt{2}.$$

(3) Der Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2t & \text{falls } 0 \leq t < 1/2, \\ 2(1-t) & \text{falls } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad 0 \circ \longrightarrow \longleftarrow \circ 1$$

hat Länge  $L(\gamma) = 2$  und nicht etwa 1, wie man vielleicht anschaulich vermuten könnte: Da  $\gamma$  das Geradenstück von 0 zu 1 einmal von Links nach Rechts, aber dann noch von Rechts nach Links durchläuft, zählt dessen Länge doppelt.

Gelegentlich ist die folgende Variante des aus der reellen Analysis bereits bekannten Satzes von Leibniz über das Differenzieren unter dem Integralzeichen nützlich. Der Beweis benutzt etwas Lebesgue-Theorie, sollte aber bereits bekannt sein.

**Lemma 2.8** (Differenzieren unter dem Integral). *Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Integrationsweg,  $V \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f: \text{tr}(\gamma) \times V \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und nach der zweiten Variablen stetig<sup>1</sup> partiell komplex-differenzierbar. Dann gilt für alle  $\zeta \in V$*

$$\frac{d}{d\zeta} \int_{\gamma} f(z, \zeta) dz = \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \zeta} f(z, \zeta) dz.$$

*Beweis.* Es sei  $(h_n)_n$  eine beliebige Folge komplexer Zahlen, welche ganz in einer abgeschlossenen Kreisscheibe  $K$  in  $V$  um den Punkt  $\zeta \in V$  enthalten sein. Ferner bezeichne  $f_2$  die Ableitung von  $f$  nach der zweiten Koordinate. Die Folge der Differenzenquotienten

$$Q_n(t) := \frac{f(\gamma(t), \zeta + h_n) - f(\gamma(t), \zeta)}{h_n} \gamma'(t)$$

lässt sich nach dem Schrankensatz der reellen Analysis durch

$$\max_{(z, \xi) \in \text{tr}(\gamma) \times K} |f_2(z, \xi)z| < \infty$$

abschätzen. (Für die letzte Ungleichung beachte, dass  $f_2$  nach Voraussetzung stetig auf der kompakten Menge  $\text{tr}(\gamma) \times K$  ist und dort also ein Maximum annimmt.) Die obigen Differenzenquotienten  $Q_n(t)$  bilden eine Funktionenfolge  $(t \mapsto Q_n(t))_n$ , die bei  $n \rightarrow \infty$  *punktweise* gegen  $f_2(\gamma(t), \zeta)\gamma'(t)$  konvergiert, aber wie oben gesehen wurde auf ganz  $[a, b]$  durch eine konstante (insbesondere integrierbare!) Funktion

---

<sup>1</sup>Als Funktion beider Variablen.

beschränkt bleibt. Der Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz liefert nun die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung in der folgenden Rechnung:

$$\int_{\gamma} f_2(z, \zeta) dz = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b Q_n(t) dt = \frac{d}{d\zeta} \int_{\gamma} f(z, \zeta) dz. \quad \square$$

## 2.2. Die Windungszahl

Zu gegebenem geschlossenen Integrationsweg  $\gamma$  und  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \text{tr}(\gamma)$  wird sich später noch der Ausdruck

$$\text{Ind}_{\gamma}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - \zeta} dz$$

als wichtig erweisen. Diesen bezeichnet man als **Windungszahl von  $\gamma$  um  $\zeta$** . Die hier vorliegende Besprechung gibt aus zeitlichen Gründen nur einen sehr beschränkten Blick auf das, was man eigentlich zum Thema Windungszahl sagen sollte. Interessierte Leserinnen und Leser mögen beispielsweise auch [10, § 6.2] konsultieren, oder gar einen Blick in das schöne Buch von Fulton [7] werfen.

Wir motivieren zunächst diese Namensgebung. Hierzu sei  $\zeta = 0 \notin \text{tr}(\gamma)$  angenommen (ansonsten ersetze man  $\gamma$  durch  $t \mapsto \gamma(t) - \zeta$ ). Ferner sei *angenommen*, dass wir  $\gamma$  bezüglich der „Überlagerungsabbildung“  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  zu einem Integrationsweg  $\Gamma$  „hochheben“ können, also ein kommutatives Diagramm der folgenden Form haben:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow \Gamma & \downarrow \exp \\ [a, b] & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{array}$$

**Bemerkung.** Die Existenz einer solchen Hochhebung rechtfertigt sich später mittels Proposition 4.7 und Beispiel 4.6 (4) (bzw. Aufgabe 9.1). (Streng genommen behauptet Proposition 4.7 nur Hochhebbarkeit zu einem Weg und nicht notwendigerweise zu einem Integrationsweg, jedoch kann man dem Beweis von Proposition 4.7 entnehmen, dass hier alles gut geht, da es sich bei  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  sogar um einen lokalen Diffeomorphismus handelt.)

Man beachte, dass eine derartige Hochhebung den Weg  $\gamma$  gewissermaßen in Polarkoordinaten darstellt:

$$(2.3) \quad \gamma(t) = \exp(\Gamma(t)) = \underbrace{\exp(\text{Re}(\Gamma(t)))}_{\in \mathbb{R}_+} \times \underbrace{\exp(i \text{Im}(\Gamma(t)))}_{\in \partial \mathbb{D}}.$$

Wir haben nun

$$2\pi i \cdot \text{Ind}_{\gamma}(0) = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_a^b \frac{(\exp \circ \Gamma)'(t)}{\exp(\Gamma(t))} dt = \int_a^b \Gamma'(t) dt = \Gamma(b) - \Gamma(a).$$

Da  $\gamma$  geschlossen ist, folgt aber  $\exp(\operatorname{Re}(\Gamma(a))) = |\gamma(a)| = |\gamma(b)| = \exp(\operatorname{Re}(\Gamma(b)))$ , also  $\operatorname{Re}(\Gamma(a)) = \operatorname{Re}(\Gamma(b))$  und analog  $\operatorname{Im}(\Gamma(a)) = \operatorname{Im}(\Gamma(b)) + 2\pi k$  mit einer ganzen Zahl  $k$ . Wir haben daher

$$\operatorname{Ind}_\gamma(0) = \frac{\operatorname{Im} \Gamma(b) - \operatorname{Im} \Gamma(a)}{2\pi} = k \in \mathbb{Z}.$$

Vergegenwärtigt man sich, was die Darstellung in (2.3) anschaulich bedeutet, so sieht man, dass die Zahl  $k$  misst wie häufig man beim „Abfahren“ des Weges  $\gamma$  den Nullpunkt umläuft. Hierbei zählt ein Umlaufen *gegen* den Uhrzeigersinn positiv und ein Umlaufen *im* Uhrzeigersinn negativ.

Wie bereits erwähnt, wollen wir uns hier nicht um die detaillierte Rechtfertigung der Existenz des benutzten Integrationsweges  $\Gamma$  kümmern. Stattdessen beweisen wir das folgende Ergebnis:

**Proposition 2.9.** *Es sei  $\gamma$  ein Integrationsweg. Dann ist  $\operatorname{Ind}_\gamma(\cdot)$  in jeder Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\gamma)$  konstant. Überdies besitzt  $\mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\gamma)$  genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente und die Windungszahl  $\operatorname{Ind}_\gamma(\cdot)$  ist auf dieser konstant 0.*

*Beweis.* Es sei  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\gamma)$ . Wir zeigen dann  $\operatorname{Ind}'_\gamma(\zeta) = 0$ . In der Tat haben wir dank Proposition 2.3

$$2\pi i \operatorname{Ind}'_\gamma(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} \int_\gamma \frac{1}{z - \zeta} dz = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{z - \zeta} dz = \int_\gamma \frac{1}{(z - \zeta)^2} dz.$$

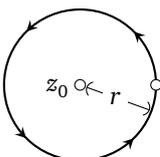
Nun hat der Integrand aber mit Bezug auf die Variable  $z$  eine Stammfunktion:

$$F'_\zeta(z) = \frac{1}{(z - \zeta)^2} \quad \text{mit} \quad F_\zeta(z) = \frac{-1}{z - \zeta}.$$

(Achtung: Differenziert haben wir nach  $\zeta$ , integrieren jedoch nach  $z$  und erhalten, unter Vernachlässigung des negativen Vorzeichens, denselben Ausdruck. Effektiv bedienen wir uns hierbei der Antisymmetrie  $k(z, \zeta) = -k(\zeta, z)$  des Cauchy-Kerns  $(z, \zeta) \mapsto (z - \zeta)^{-1}$ .) Proposition 2.3 liefert  $2\pi i \operatorname{Ind}'_\gamma(\zeta) = F_\zeta(\gamma(b)) - F_\zeta(\gamma(a))$ . Für geschlossene Wege  $\gamma$  ist also  $\operatorname{Ind}'_\gamma(\zeta) = 0$  und somit  $\operatorname{Ind}_\gamma(\zeta)$  lokal konstant.

Da  $\operatorname{tr}(\gamma)$  kompakt und somit insbesondere beschränkt ist, sieht man leicht, dass  $\mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\gamma)$  genau eine unbeschränkte Komponente besitzt. Mittels Lemma 2.6 folgert man leicht, dass  $|\operatorname{Ind}_\gamma(\zeta)|$  für  $\zeta$  aus dieser Komponente beliebig klein sein muss (denn durch Wahl von großem  $|\zeta|$  kann man den Integranden  $1/(z - \zeta)$ ,  $z \in \operatorname{tr}(\gamma)$ , beliebig klein halten). Daraus folgt  $\operatorname{Ind}_\gamma(\zeta) = 0$  für alle  $\zeta$  aus dieser Komponenten.  $\square$

**Korollar 2.10** (Windungsverhalten eines Kreisweges). *Für jedes  $r > 0$  erfüllt der Weg*

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + r \exp(2\pi i t)$$


die Beziehung  $\text{Ind}_\gamma(z_0) = 1$ . (Beweis: Diesen Wert hatten wir bereits in Beispiel 2.4 (2) ausgerechnet.) Da  $\mathbb{C} \setminus \text{tr}(\gamma)$  aber aus genau zwei Komponenten besteht, nämlich der beschränkten Komponente  $B(z_0, r) \ni z_0$  und der unbeschränkten Komponente  $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r)$ , liefert Proposition 2.9

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |z - z_0| < r, \\ 0 & \text{falls } |z - z_0| > r. \end{cases}$$

Beim Studium der Windungszahlen komplizierterer Wege hilft oft das nächste Resultat:

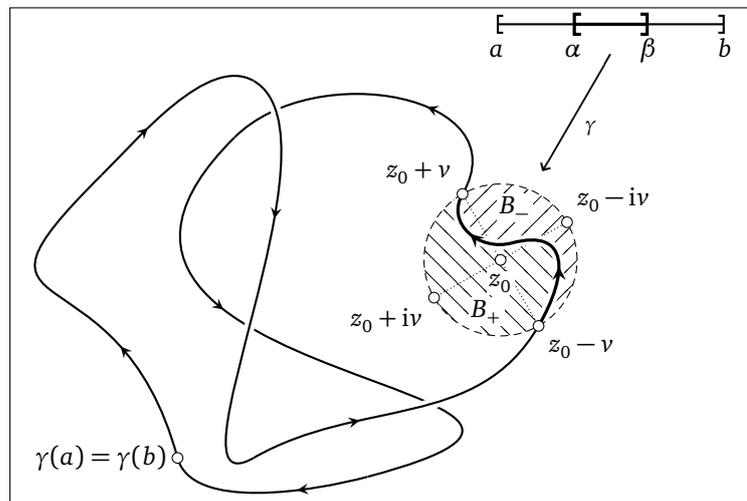
**Proposition 2.11.** *Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein geschlossener Weg. Ferner habe man Zahlen  $a < \alpha < \beta < b$  und  $z_0, v \in \mathbb{C}$  mit  $|v| = r$  und den folgenden Eigenschaften:*

- $\gamma(\alpha) = z_0 - v$ ,  $\gamma(\beta) = z_0 + v$ , (also insbesondere  $z_0 = \frac{1}{2}(\gamma(\alpha) + \gamma(\beta))$ ),
- $\gamma(t) \in B(z_0, r)$  genau dann wenn  $t \in (\alpha, \beta)$ ,
- $\gamma(t) \in \overline{B}(z_0, r)$  genau dann wenn  $t \in [\alpha, \beta]$ .

Ferner sei  $B(z_0, r) \setminus \text{tr}(\gamma)$  die Vereinigung von genau zwei Zusammenhangskomponenten  $B_+$  und  $B_-$ , wobei die Bezeichnung so gewählt sei, dass  $z_0 + iv \in \overline{B}_+$  und  $z_0 - iv \in \overline{B}_-$  gelte. Dann ist

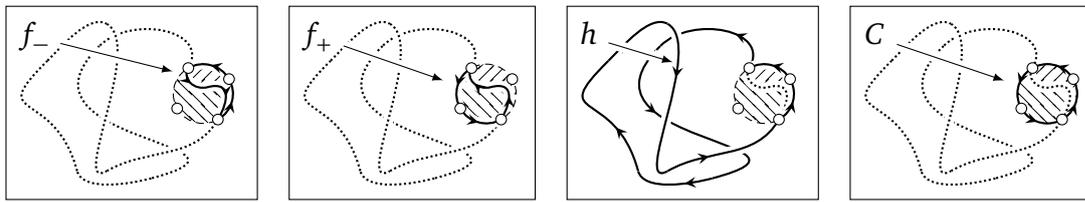
$$\text{Ind}_\gamma(z_+) = 1 + \text{Ind}_\gamma(z_-)$$

für alle  $(z_+, z_-) \in B_+ \times B_-$ .



*Beweis.* Wir definieren zunächst vier geschlossene Hilfswege  $f_-$ ,  $f_+$ ,  $h$  und  $C$ ; Man könnte deren Parametrisierung explizit hinschreiben, indem man Teile von  $\gamma$  und einer Parametrisierung von  $\partial B(z_0, r)$  zusammenstückelt (siehe etwa [17, Satz 10.37] für derartige Details), aber wir verzichten darauf und deuten das Verhalten der

fraglichen Wege lediglich durch Skizzen an:



Sei nun  $(z_+, z_-) \in B_+ \times B_-$ . Wir zeigen  $\text{Ind}_{f_-}(z_+) = 0$  (und analog sieht man  $\text{Ind}_{f_+}(z_-) = 0$ ). Die Voraussetzungen zeigen, dass  $z_+$  und  $z_0 + iv$  in derselben Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus \text{tr}(f)$  liegen. Allerdings liegt  $z_0 + iv$  in der unbeschränkten Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \text{tr}(f)$  (denn alle beschränkten Komponenten sind in der offenen Kreisscheibe  $B(z_0, r)$  lokalisiert), und wir erhalten mit Proposition 2.9  $0 = \text{Ind}_f(z_0 + iv) = \text{Ind}_f(z_+)$ , wie gewünscht.

Dank des soeben Bewiesenen ist

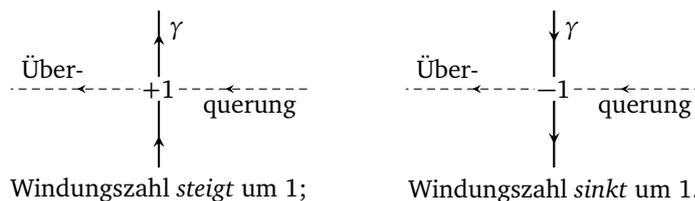
$$\text{Ind}_\gamma(z_+) = \text{Ind}_\gamma(z_+) + \underbrace{\text{Ind}_{f_-}(z_+)}_{=0} = \text{Ind}_h(z_+).$$

(Für die letzte Gleichung starre man auf die Skizzen von  $\gamma$ ,  $f_-$  und  $h$ .) Wegen  $\text{tr}(h) \cap B(z_0, r) = \emptyset$  liegen  $z_+$  und  $z_-$  in derselben Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus \text{tr}(h)$ . Insbesondere folgt

$$\text{Ind}_\gamma(z_+) = \text{Ind}_h(z_-) = \text{Ind}_h(z_-) + \underbrace{\text{Ind}_{f_+}(z_-)}_{=0} = \text{Ind}_\gamma(z_-) + \text{Ind}_C(z_-)$$

und mit  $\text{Ind}_C(z_-) = 1$  erhält man die Behauptung. □

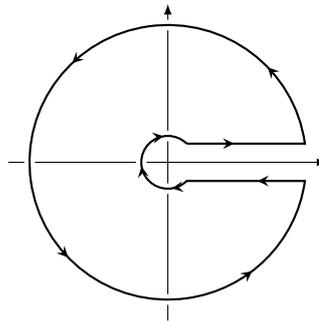
Proposition 2.11 erlaubt für die meisten in der Praxis auftretenden Wege die Berechnung deren Windungszahl auf allen Zusammenhangskomponenten. Hierzu überlegt man sich, dass Proposition 2.11 die folgenden „Vorfahrtsregeln“ beim Überqueren der Spur eines Weges impliziert:



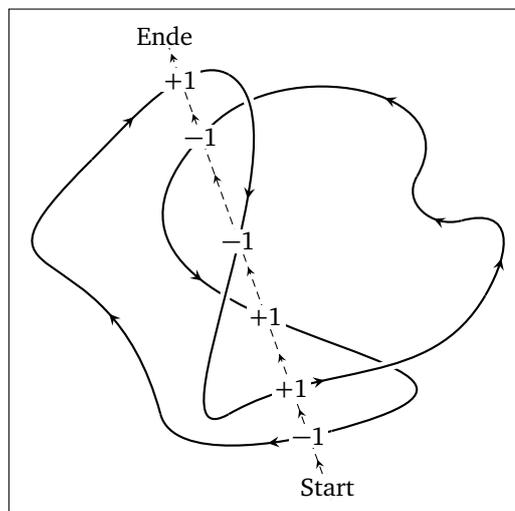
(Für eine beispielhafte Anwendung dieser Regeln siehe Abbildung 9.)

Der wohl komplizierteste Weg, für den wir in dieser Vorlesung tatsächlich „von Hand“ Windungszahlen zu berechnen haben werden, begegnet uns im Beweis von

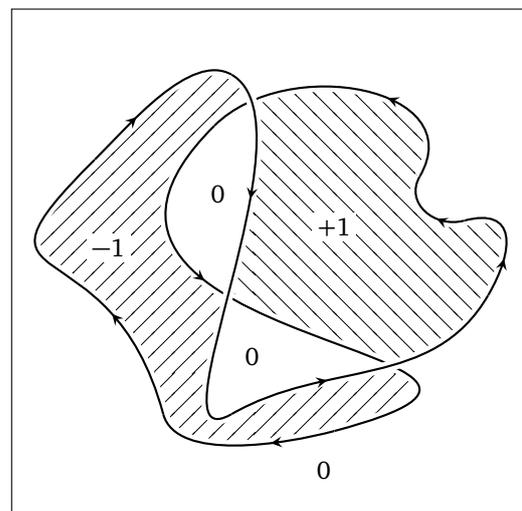
Satz 5.8. Er hat die Form



und die Berechnung aller auftretenden Windungszahlen mittels der obigen Vorfahrtsregeln ist selbst hier eine Trivialität.



(a) Beim Überqueren der Spur von  $\gamma$  (startend von unten) ändert sich die Windungszahl jeweils wie hier angedeutet.



(b) Mit der nebenstehenden Überlegung zusammen damit, dass die Windungszahl auf der unbeschränkten Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \text{tr}(\gamma)$  stets Null ist, ergibt sich das vollständige Windungsverhalten von  $\gamma$ .

**Abbildung 9.** Illustration zur praktischen Anwendung von Proposition 2.11 zur Berechnung von  $\text{Ind}_\gamma(\cdot)$  auf den Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{C} \setminus \text{tr}(\gamma)$  für einen (hinreichend gutartigen) Weg  $\gamma$ .

### 2.3. Lemma von Goursat und erste Anwendungen

Der noch zu behandelnde *Integralsatz von Cauchy* behauptet unter gewissen Bedingungen, dass ein Wegintegral

$$\int_\gamma f(z) dz$$

über einen geschlossenen Weg  $\gamma$  und holomorphe Funktion  $f$  verschwindet.

In ihrer allgemeinsten Form involvieren diese Bedingungen Eigenschaften der Punkte, die von  $\gamma$  umlaufen werden (vgl. den vorherigen Abschnitt für den Windungszahl-Begriff) und die Topologie des Gebiets, auf dem  $f$  holomorph ist. Die hierzu nötige Maschinerie gilt es erst noch zu entwickeln. (Siehe später!)

Unter Annahme gewisser schärferer Voraussetzungen lässt sich das Verschwinden des fraglichen Wegintegrals sehr konzise aus dem Integralsatz von Stokes (in seiner allgemeinen Form) oder (konkreter) dem Integralsatz von Green herleiten. Obgleich derartige Argumente (die in ähnlicher Form schon Cauchy und Weierstraß bekannt waren) zwar für die meisten Anwendungen reichen würden, beschreiten wir einen anderen Weg: Die Erkenntnis, dass sich der Integralsatz von Cauchy auch beweisen lässt, wenn man nur Holomorphie von  $f$  fordert und  $\gamma$  sehr einfach ist, geht im Wesentlichen auf Goursat zurück. Die Beschränkung auf sehr einfache Wege  $\gamma$  blendet alle sonst auftretenden topologischen Schwierigkeiten einfach aus und reicht — wie wir durch zahlreiche Folgerungen noch sehen werden — für eine „lokale“ Theorie holomorpher Funktionen völlig aus. Goursat selbst arbeitete mit Wegen, welche Rechtecke beranden; Wir wählen hier eine Variante mit Dreiecken, die auf Pringsheim zurück geht. Welche der beiden Varianten man wählt ist im Wesentlichen eine Geschmacksfrage, jedoch lässt die Variante mit Dreiecken einen geringfügig kürzeren Weg zum Satz von Morera (Satz 3.6) zu. In Vorbereitung auf die noch zu beweisende *Cauchysche Integralformel* (Satz 2.15 für eine erste Version) ist es günstig einen Ausnahmepunkt  $p$  zuzulassen, in dem der Integrand  $f$  nicht holomorph (aber wenigstens stetig!) zu sein braucht. Es stellt sich dann verblüffender Weise später heraus, dass dieser Ausnahmepunkt in Wahrheit nur hypothetischer Natur ist (siehe Satz 3.15).

**Lemma 2.12** (Goursat). *Es bezeichne  $\Delta_0$  das abgeschlossene Dreieck mit Eckpunkten  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$ , also<sup>2</sup>*

$$\Delta_0 = \Delta(p_1, p_2, p_3) = \{ \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 \in \mathbb{C} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1], \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \}.$$

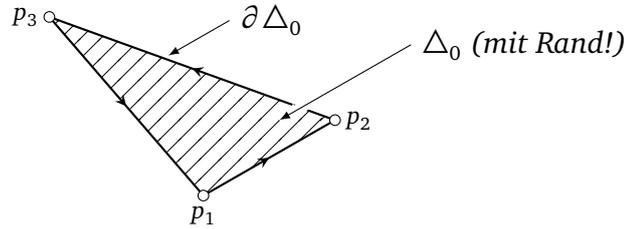
*$f: U \rightarrow \mathbb{C}$  sei eine stetige Funktion auf einer offenen Menge  $U \supset \Delta_0$  und holomorph auf  $\Delta_0 \setminus \{p\}$  für ein  $p \in U$ . Dann gilt*

$$\int_{\partial \Delta_0} f(z) dz = 0,$$

---

<sup>2</sup>Der entartete Fall, dass alle drei Punkte auf einer Geraden liegen sei hier nicht ausgeschlossen und macht im Beweis auch keine Schwierigkeiten.

wobei das Integral ein Wegintegral entlang eines Integrationsweg  $\partial \Delta_0$  bezeichne, der den Rand von  $\Delta_0$  geradlinig von  $p_1$  nach  $p_2$  nach  $p_3$  nach  $p_1$  durchläuft:<sup>3</sup>



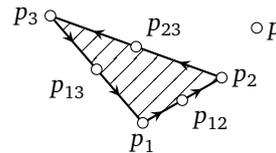
*Beweis.* Falls die drei Punkte  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  alle auf einer Geraden liegen, ist die Behauptung des Satzes leicht durch Aufteilung des Weges  $\partial \Delta_0$  und Umordnen der Summanden demonstrierbar. Wir gehen im Folgenden also davon aus, dass  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  nicht alle auf einer Geraden liegen und unterscheiden diverse Fälle, je nachdem, wo der Ausnahmepunkt  $p$  liegt.

*Fall 1:* Zunächst betrachten wir den Fall  $p \notin \Delta_0$ . (Beachte, dass wegen  $\text{tr}(\partial \Delta_0) \subseteq \Delta_0$  damit insbesondere auch  $p \notin \text{tr}(\partial \Delta_0)$  gilt.) Wir beginnen mit einem zweidimensionalen Bisektionsargument und bilden die Mittelpunkte

$$p_{12} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2),$$

$$p_{23} = \frac{1}{2}(p_2 + p_3),$$

$$p_{13} = \frac{1}{2}(p_1 + p_3).$$



In dieser Art erhalten wir vier zu  $\Delta_0$  kongruente Teildreiecke

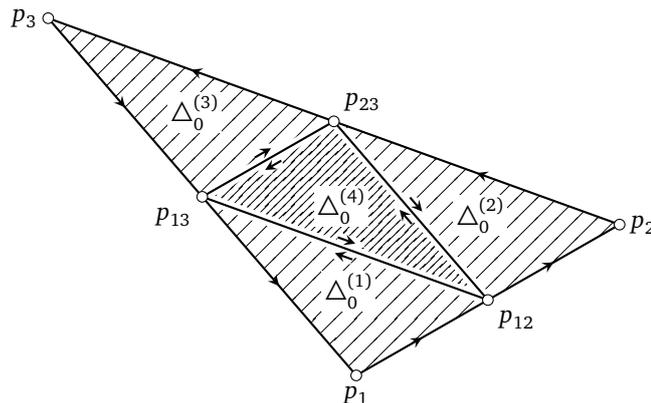
$$\Delta_0^{(1)} = \Delta(p_1, p_{12}, p_{13}),$$

$$\Delta_0^{(2)} = \Delta(p_2, p_{23}, p_{12}),$$

$$\Delta_0^{(3)} = \Delta(p_3, p_{13}, p_{23}),$$

$$\Delta_0^{(4)} = \Delta(p_{12}, p_{23}, p_{13}),$$

deren Ränder wir durch stückweise geradlinige Wege parametrisieren, welche die Eckpunkte gemäß der oben angedeuteten Reihenfolge durchlaufen.



<sup>3</sup>Die Notation  $\partial \Delta_0$  will man vielleicht eher als Menge der Randpunkte von  $\Delta_0$  verstehen, hier ist allerdings ein Weg gemeint, dessen Spur die fragliche Menge ist.

Indem man nun den Weg  $\gamma$  passend zerlegt und dann die einzelnen Beiträge umgruppiert — die Details wollen wir hier nicht ausführen! — sieht man

$$\int_{\partial\Delta_0} = \int_{\partial\Delta_0^{(1)}} + \int_{\partial\Delta_0^{(2)}} + \int_{\partial\Delta_0^{(3)}} + \int_{\partial\Delta_0^{(4)}}.$$

Anwenden der Dreiecksungleichung liefert

$$\left| \int_{\partial\Delta_0} f(z) dz \right| \leq 4 \max_{1 \leq j \leq 4} \left| \int_{\partial\Delta_0^{(j)}} f(z) dz \right| = 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right|$$

mit  $\Delta_1 = \Delta_0^{(j)}$  für ein geeignetes  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Wir wiederholen die eben durchgeführte Prozedur mit  $\Delta_1$  statt  $\Delta_0$  und erhalten dann ein weiteres Teildreieck  $\Delta_2$  (mit analoger Maximalitätseigenschaft). Induktiv erhält man eine Folge von ineinander geschachtelten Teildreiecken

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots,$$

mit

$$L(\partial\Delta_n) = \frac{L(\partial\Delta_0)}{2^n} \quad \text{und} \quad \left| \int_{\partial\Delta_0} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right|.$$

Daraus ergibt sich insbesondere (Stichwort: *Intervallschachtelung!*)

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \Delta_n = \{z_0\}$$

für ein  $z_0 \in \Delta_0$  (vgl. Abbildung 10).

Da  $f(z)$  in  $z_0$  komplex-differenzierbar ist, gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $r \in (0, 1)$  derart, dass

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \epsilon |z - z_0|$$

für alle  $z \in B(z_0, r)$  gilt. Wegen Proposition 2.3 (vgl. Beispiel 2.4) ist

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_n} \underbrace{(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))}_{\text{(Hat eine Stammfunktion auf } \mathbb{C}.)} dz.$$

Für hinreichend große  $n$  (abhängig von  $\epsilon$ ) ist dann  $\Delta_n \subset B(z_0, r)$  und die obige Gleichung liefert nun zusammen mit Lemma 2.6

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \epsilon |z - z_0| L(\partial\Delta_n) \leq \epsilon L(\partial\Delta_n)^2 = \epsilon \frac{L(\partial\Delta_0)^2}{4^n}.$$

Also ist

$$\left| \int_{\partial\Delta_0} f(z) dz \right| \leq \epsilon L(\partial\Delta_0)^2.$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig war, folgt

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z) dz = 0.$$

*Fall 2:* Wir behandeln nun den Fall  $p \in \Delta_0$ . Sei zunächst  $p$  einer der Eckpunkte  $p_1, p_2, p_3$ , etwa  $p = p_1$ . Wähle nun einen Punkt  $x$  auf der Strecke von  $p_1$  nach  $p_2$ , aber nahe bei  $p_1$  und analog einen Punkt  $y$  auf der Strecke von  $p_1$  nach  $p_3$  (ebenfalls nahe bei  $p_1$ ); siehe Abbildung 11 (a). Nun zerlegt man wieder

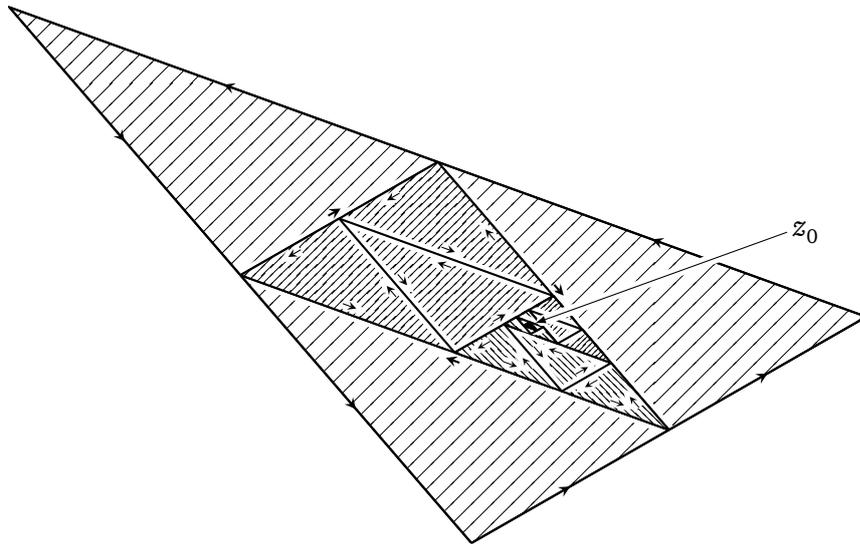
$$\int_{\partial \Delta_0} f(z) dz = \left\{ \int_{\partial \Delta(p_1, x, y)} + \int_{\partial \Delta(x, p_2, p_3)} + \int_{\partial \Delta(p_3, y, x)} \right\} f(z) dz.$$

Die letzten beiden Integrale sind nach dem zuvor Bewiesenen gleich 0 und das erste Integral auf der rechten Seite lässt sich trivial mit Lemma 2.6 durch

$$\max_{z \in \Delta_0} |f(z)| \times (|x - p_1| + |y - x| + |p_1 - y|)$$

abschätzen, was für  $x, y \rightarrow p_1$  ebenfalls gegen 0 konvergiert.<sup>4</sup>

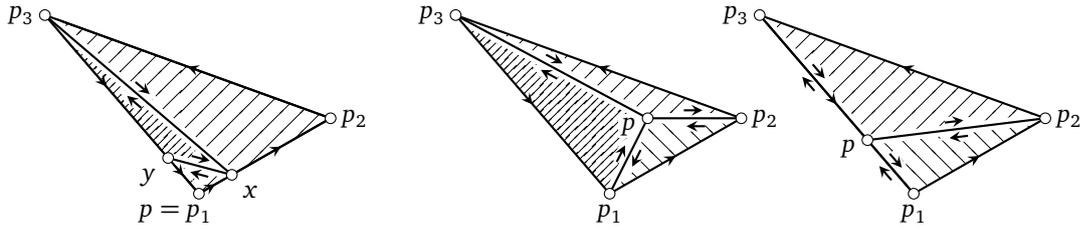
*Fall 3:* Sei nun der Ausnahmepunkt  $p \in \Delta_0$  kein Eckpunkt von  $\Delta_0$ . Dann unterteilen wir wie in Abbildung 11 (b) in Teildreiecke. Die Integrale entlang der Teildreiecke erweisen sich nun wie in Fall 2 als gleich 0.  $\square$



**Abbildung 10.** Illustration zu den geschachtelten Dreiecken  $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$  aus dem Beweis von Lemma 2.12 mit Schnittpunkt  $z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ .

Wir unterbrechen die weitere Entwicklung der Theorie der holomorphen Funktionen für einen kurzen Moment und illustrieren Lemma 2.12 durch eine fourieranalytische Anwendung:

<sup>4</sup>Man beachte, dass wir uns im vorherigen Argument eine derartig grobe Abschätzung nicht leisten konnten, da wir noch einen Faktor  $4^n$  „zu besiegen“ hatten, mit dem die Integrale entlang  $\partial \Delta_n$  gewichtet wurden; In der aktuellen Situation wird das problematische Integral entlang  $\partial \Delta(p_1, x, y)$  jedoch lediglich einfach gewichtet.



(a) Zu Fall 2:  $p \in \Delta_0$  ist ein Eckpunkt.  
 (b) Zu Fall 3:  $p \in \Delta_0$  ist kein Eckpunkt.  
 (Der entartete Fall bei dem  $p$  auf einer Seite des Dreiecks liegt sei hier auch zugelassen.)

**Abbildung 11.** Illustration zur Fallunterscheidung im Beweis von Lemma 2.12, wenn der Ausnahmepunkt  $p$  in  $\Delta_0$  enthalten ist.

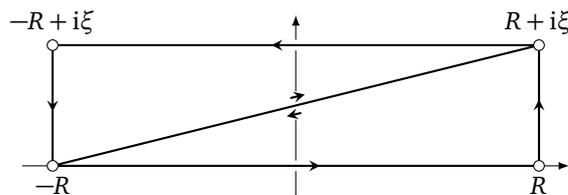
**Beispiel 2.13.** Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-\pi x^2)$ , stimmt mit ihrer Fouriertransformierten  $\hat{f}$  überein, d.h. wir haben

$$f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi i x \xi) dx.$$

Den Fall  $\xi = 0$  behandeln wir ad-hoc mittels Fubini und Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \hat{f}(0)^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-\pi(x^2 + y^2)) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\pi r^2) r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{-1}{2\pi} \exp(-\pi r^2) \right]_{r=0}^{\infty} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} d\theta = 1 = f(0)^2. \end{aligned}$$

Aus Positivitätsgründen folgt  $\hat{f}(0) = f(0)$ , wie gewünscht. Für  $\xi > 0$  beachten wir für einen Parameter  $R > 0$  den folgenden Weg  $\gamma_R$ , der sich durch zwei Dreieckswege zusammensetzt:



Lemma 2.12 liefert nun

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_R} \exp(-\pi z^2) dz = \int_{-R}^R \exp(-\pi x^2) dx - \int_{-R}^R \exp(-\pi(x + i\xi)^2) dx + \\ &\quad + \int_0^{\xi} \exp(-\pi(R + ix)^2) dx - \int_0^{\xi} \exp(-\pi(-R + ix)^2) dx. \end{aligned}$$

Das erste Integral rechter Hand konvergiert für  $R \rightarrow \infty$  offenbar gegen  $\hat{f}(0) = 1$  und die letzten beiden Integrale lassen sich trivial mit Lemma 2.6 dem Betrage nach durch

$$\max_{0 \leq x \leq \xi} |\exp(-\pi(\pm R + ix)^2)| \times \xi \leq \exp(-\pi(R^2 - \xi)) \times \xi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

abschätzen. Für das zweite Integral hingegen erhalten wir

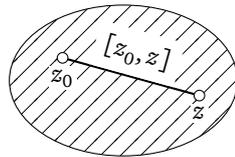
$$\int_{-R}^R \exp(-\pi(x + i\xi)^2) dx = \exp(\pi\xi^2) \int_{-R}^R \exp(-\pi x^2) \exp(-2i\pi x \xi) dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}(\xi)}{f(\xi)}.$$

Insgesamt haben wir also  $0 = 1 - \frac{\hat{f}(\xi)}{f(\xi)} + 0 - 0$  und hieraus folgt die Behauptung; Den Fall  $\xi < 0$  behandelt man analog.

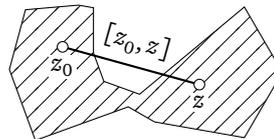
Für eine sehr ähnliche Anwendung siehe auch Aufgabe 3.3.

## 2.4. Die Cauchysche Integralformel

Die Anwendung in Beispiel 2.13 hat bereits aufgezeigt, dass man sich in der Praxis nicht nur auf dreieckige Integrationswege beschränken möchte. (Aufgabe 3.3 führt dies umso klarer vor Augen.) Als erste Verbesserung von Lemma 2.12 beweisen wir den Satz von Cauchy für *konvexe* Mengen; Hierbei heißt eine Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  **konvex**, falls für je zwei Punkte  $z_0, z \in U$  auch das gesamte Geradenstück  $[z_0, z] := \{(1-t)z_0 + tz \in \mathbb{C} : t \in [0, 1]\}$  in  $U$  liegt:



konvex,



nicht konvex.

**Satz 2.14** (Satz von Cauchy für konvexe Mengen). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine konvexe offene Menge.  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig auf  $U$  und holomorph auf  $U \setminus \{p\}$  für ein  $p \in U$ . Dann gibt es ein holomorphes<sup>5</sup>  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F' = f$ . Insbesondere gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg  $\gamma$  in  $U$ .

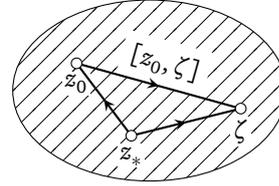
*Beweis.* Der Zusatz über Wegintegrale folgt aus Proposition 2.3 sobald  $F$  mit  $F' = f$  gefunden ist. Sei nun  $z_* \in U$  fest gewählt. Wir definieren  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$F(z_0) := \int_{[z_*, z_0]} f(z) dz,$$

<sup>5</sup>Aus der *Differentialgeometrie* kennt man derartige Aussagen vielleicht auch unter dem Namen „Poincaré-Lemma.“

wobei wir hier unter  $\int_{[z_*, z_0]}$  das Wegintegral entlang eines Weges verstehen wollen, welcher linear von  $z_*$  zu  $z_0$  verläuft und in jedem Punkt Ableitung 1 hat. Es verbleibt die Holomorphie von  $F$ , sowie  $F' = f$  zu verifizieren. Sei nun  $z_0 \in U$  fixiert und  $\zeta \in U$  beliebig. Wegen Lemma 2.12 ist

$$F(\zeta) - F(z_0) = \left\{ \int_{[z_*, \zeta]} - \int_{[z_*, z_0]} \right\} f(z) dz = \int_{[z_0, \zeta]} f(z) dz.$$



Daraus ergibt sich weiter

$$\frac{F(\zeta) - F(z_0)}{\zeta - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{\zeta - z_0} \int_{[z_0, \zeta]} (f(z) - f(z_0)) dz.$$

Lemma 2.6 liefert

$$\left| \frac{F(\zeta) - F(z_0)}{\zeta - z_0} - f(z_0) \right| \leq \max_{\xi \in [z_0, \zeta]} |f(\xi) - f(z_0)|$$

und da  $f$  in  $z_0$  stetig ist, konvergiert die rechte Seite hierin für  $\zeta \rightarrow z_0$  gegen 0. Also ist  $F'(z_0) = f(z_0)$ , wie gewünscht.  $\square$

**Bemerkung.** Konvexität ist eine sehr starke Forderung an die „globale Geometrie“ einer Menge. Indess mögen einem die Voraussetzungen von Satz 2.14 vielleicht sehr restriktiv vorkommen. Dies ist allerdings in gewissem Sinne nicht der Fall, da der topologische Vektorraum  $\mathbb{C}$  zumindest „lokal konvex“ ist, d.h. jeder Punkt einer offenen Menge  $U$  besitzt eine offene Umgebung, die ganz in  $U$  enthalten ist. Insoweit lässt sich Satz 2.14 also wenigstens lokal anwenden und dies reicht — wie wir im Folgenden noch sehen werden — schon für einige sehr brauchbare Ergebnisse hin.

**Satz 2.15** (Cauchysche Integralformel für konvexe Mengen). *Sei  $\gamma$  ein geschlossener Integrationsweg in einer konvexen offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt für alle  $z_0 \in U \setminus \text{tr}(\gamma)$  die **Cauchysche Integralformel***

$$f(z_0) \cdot \text{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

(Hier ist die Windungszahl  $\text{Ind}_\gamma(z_0)$  bereits aus Proposition 2.9 bekannt.)

*Beweis.* Es sei  $z_0 \in U \setminus \text{tr}(\gamma)$  fixiert. Wir definieren  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{falls } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{falls } z = z_0. \end{cases}$$

Dann erfüllt  $g$  die Voraussetzungen von Satz 2.14 und wir erhalten

$$0 = \int_\gamma g(z) dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Das zweite Integral ist aber genau  $2\pi i f(z_0) \text{Ind}_\gamma(z_0)$  und wir sind fertig.  $\square$



## Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel

### 3.1. Potenzreihendarstellung

Die Cauchysche Integralformel (Satz 2.15) wirkt beinahe schon magisch(!): Das Integral

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_a^b \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) dt,$$

zu dessen Berechnung *nur Werte von  $f$  auf  $\text{tr}(\gamma)$  herangezogen werden*, wird in Bezug zum Funktionswert  $f(z_0)$  gesetzt!

**Korollar 3.1** (Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen). *Es sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  holomorph und  $U$  enthalte die gesamte abgeschlossene Kreisscheibe  $\bar{B}(z_0, r)$ . Dann ist  $f(z_0)$  der Mittelwert der Funktionswerte von  $f|_{\partial B(z_0, r)}$ :*

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + r \exp(2\pi i t)) dz.$$

*Beweis.* Wir betrachten den Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ ,  $t \mapsto z_0 + r \exp(2\pi i t)$ . Mit Satz 2.15 und Korollar 2.10 erhalten wir

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z_0 + r \exp(2\pi i t))}{z_0 + r \exp(2\pi i t) - z_0} r \exp(2\pi i t) 2\pi i dt.$$

Vereinfachen dieses Ausdrucks liefert schon die Behauptung. □

Mit etwas mehr Aufwand lässt sich deutlich mehr zeigen:

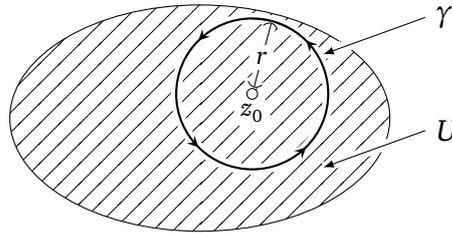
**Satz 3.2** (Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen). *Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in U$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gibt es genau eine Potenzreihe*

$$\zeta \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - z_0)^n$$

*mit positivem Konvergenzradius  $R > 0$ , die  $f$  auf  $B(z_0, R) \cap U$  darstellt. Dabei ist  $R > r$  für jedes  $r$  mit  $\bar{B}(z_0, r) \subseteq U$  und für die Koeffizienten  $a_n$  gilt die Formel*

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

wobei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ ,  $t \mapsto z_0 + r \exp(2\pi i t)$  den Kreisrand  $\partial B(z_0, r)$  parametrisiere.



*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$ . Wenn  $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$  für  $\zeta$  in einer offenen Kreisscheibe um 0 gilt, so hat man offenbar (siehe Satz 1.6)

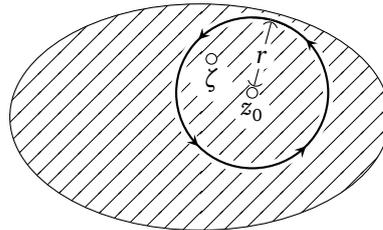
$$f^{(n)}(0) = n! a_n,$$

woraus auch schon die *Eindeutigkeitsaussage* im Satz folgt.

Nun zur *Existenz*. Es sei  $r > 0$  derart, dass die gesamte abgeschlossene Kreisscheibe  $\bar{B}(0, r)$  in  $U$  enthalten ist und  $\gamma$  wie im Satz. Mit Satz 2.15 und Korollar 2.10 erhalten wir

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

für  $\zeta \in B(0, r)$ :



Mit der bekannten Formel für geometrische Reihen erhalten wir

$$\frac{f(z)}{z - \zeta} = \frac{f(z)}{z} \frac{1}{1 - \zeta/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n$$

für alle  $z \in \text{tr}(\gamma) = \partial B(0, r)$ . (Beachte  $|\zeta/z| < 1$ !) Die Folge der Partialsummen der obigen unendlichen Reihe bildet eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig<sup>1</sup> gegen Ihre Grenzfunktion konvergiert. Mit Lemma 2.6 gewinnt man hieraus schnell die Vertauschbarkeit von Integration und Summation in der folgenden Rechnung:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n;$$

hier sei  $a_n$  durch die Formel aus dem Satz gegeben (man beachte unsere eingangs gemachte Voraussetzung  $z_0 = 0$ ). Da die eben durchgeführte Rechnung insbesondere

<sup>1</sup>Benutze hierzu, dass  $f$  auf der kompakten Menge  $\text{tr}(\gamma)$  ein Maximum annimmt.

die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite für alle  $\zeta \in B(0, r)$  liefert, folgt auch die Aussage über den Konvergenzradius.  $\square$

**Bemerkung** (Natürlichkeit von  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , etc.). Geht man beispielsweise schon davon aus die reelle Exponentialfunktion  $\exp_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zu kennen und möchte diese nun auf ganz  $\mathbb{C}$  erklären derart, dass diese holomorph ist, so gibt es eine und nur(!) eine Möglichkeit dies zu tun: Jede holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f|_{\mathbb{R}} = \exp_{\mathbb{R}}$  stimmt mit der eingangs durch die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$  definierten Funktion  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  überein. Derartige Überlegungen übertragen sich ebenfalls auf weitere Funktionen, wie etwa Sinus und Kosinus. Insbesondere klärt sich auch, wieso man nicht  $\cos(z)$  als  $\operatorname{Re}(\exp(iz))$  definiert: Für reelle  $z$  stimmen beide Ausdrücke zwar überein, aber  $z \mapsto \operatorname{Re}(\exp(iz))$  definiert keine(!) holomorphe Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Möchte man also eine holomorphe Kosinusfunktion  $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  erklären und hat sich bereits darauf eingelassen, dass diese für reelle Argumente  $z$  durch  $\operatorname{Re}(\exp(iz))$  gegeben sein sollte, so folgt bereits notwendigerweise

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

**Korollar 3.3** (Goursat).  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph auf einer offenen Menge  $U$ . Dann ist auch  $f': U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph; Insbesondere ist  $f$  unendlich oft komplex-differenzierbar.

*Beweis.* Sei  $z_0 \in U$  beliebig. Dann lässt sich  $f$  laut Satz 3.2 in einer hinreichend kleinen Kreisscheibe um  $z_0$  durch eine konvergente Potenzreihe darstellen. Da Potenzreihen innerhalb ihrer Konvergenzkreisscheibe unendlich oft komplex-differenzierbare Funktionen definieren (siehe Satz 1.6) folgt auch schon die Behauptung.  $\square$

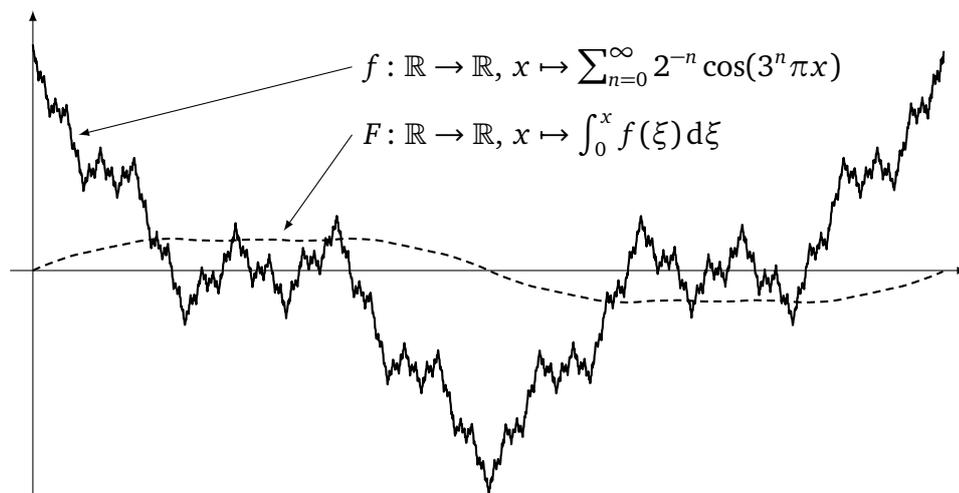
Korollar 3.3 ist *bemerkenswert!* Aus der reellen Analysis kennt man sogar überall stetig differenzierbare Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Ableitung *nirgends* differenzierbar ist (siehe Abbildung 12). *In der komplexen Analysis treten derartige Pathologien nicht auf!*

### 3.2. Cauchysche Abschätzungen und Konsequenzen

**Lemma 3.4** (Cauchysche Abschätzungen für Taylor-Koeffizienten). *Es sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  holomorph und  $U$  enthalte die gesamte abgeschlossene Kreisscheibe  $\bar{B}(z_0, r)$ . Ferner sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  die Potenzreihendarstellung von  $f$  um  $z_0$ . Dann gilt*

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \max_{z \in \partial B(z_0, r)} |f(z)|.$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt leicht, wenn man Lemma 2.6 auf die Formel für  $a_n$  aus Satz 3.2 anwendet.  $\square$



**Abbildung 12.** Plot einer von Weierstraß gefundenen stetigen, aber nirgends differenzierbaren Funktion  $f$ , sowie einer zugehörigen Stammfunktion  $F$ ; Letztere ist mit Blick auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung natürlich *überall* differenzierbar.

Kurz gefasst besagen die Cauchyschen Abschätzungen, dass Kontrolle über das Maximum von  $f$  auf einem Kreisrand eine Kontrolle über die Taylor-Koeffizienten von  $f$  im Mittelpunkt<sup>2</sup> verschafft und je größer der Radius des Kreises, desto stärker ist das Ergebnis. Der nächste Satz verschafft sich nach Voraussetzung beliebig viel Kontrolle über das Maximum von  $f$  und liefert im Gegenzug maximal viel Kontrolle über  $f$  selbst. Zu seiner Formulierung führen wir noch eine Sprechweise ein: Eine auf ganz  $\mathbb{C}$  definierte holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  nennt man auch **ganze Funktion**.

**Satz 3.5** (Liouville). *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

*Beweis.* Gemäß Satz 3.2 lässt sich jede ganze Funktion  $f$  auf ganz  $\mathbb{C}$  durch ihre Taylor-Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  um einen beliebigen Entwicklungspunkt  $z_0$  darstellen. Für die Koeffizienten  $a_n$  gilt nach Lemma 3.4  $|a_n| \leq r^{-n} \max_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$  für jedes  $r > 0$ . Mit  $r \rightarrow \infty$  folgt  $a_n = 0$ , also  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 (z - z_0)^n = 0$ .  $\square$

Der Satz von Liouville eignet sich für einen besonders kurzen Beweis vom Fundamentalsatz der Algebra (siehe Satz 1.2 auf Seite 4):

*Beweis von Satz 1.2.* Es sei  $P \in \mathbb{C}[Z]$  ein nichtkonstantes Polynom ohne Nullstellen in  $\mathbb{C}$ . Dann ist  $1/P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto 1/P(z)$ , eine ganze Funktion. Da ein Polynom vom Grad  $\geq 1$  für  $|z| \rightarrow \infty$  dem Betrage nach gegen Unendlich geht, folgt, dass  $1/P$  beschränkt ist. (Außerhalb einer hinreichend groß gewählten Kreisschreibe nimmt  $P$  nämlich nur große Werte, und  $1/P$  damit nur kleine, an, und auf dem Abschluss

<sup>2</sup>Tatsächlich könnte man auch Taylor-Koeffizienten an jedem Punkt des Kreisinneren kontrollieren, aber diese Verallgemeinerung braucht uns hier nicht zu kümmern.

von besagter Kreisscheibe nimmt  $|P|$  nach dem bekannten Satz vom Minimum und Maximum aus der reellen Analysis ein Minimum an und dieses ist nach Voraussetzung von Null verschieden.) Also ist  $1/P$  konstant nach Satz 3.5. Dann hat das Polynom  $P$  aber Grad 0; Insbesondere *muss* jedes komplexe Polynom mit höherem Grad eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$  haben.  $\square$

### 3.3. Der Satz von Morera

Das Lemma von Goursat (Lemma 2.12) hat auch eine Umkehrung, die später in einigen Beweisen nützlich sein wird, um die Holomorphie gewisser Funktionen nachzuweisen (siehe etwa den Beweis vom Konvergenzsatz von Weierstraß, Satz 6.1, in Kapitel 6):

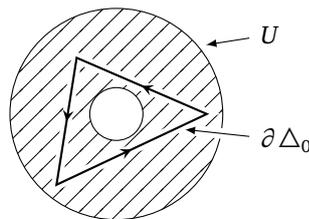
**Satz 3.6** (Morera).  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig auf einer offenen Menge  $U$  und für jedes abgeschlossene Dreieck  $\Delta_0 \subset U$  gelte

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z) dz = 0.$$

Dann ist  $f$  holomorph.

*Beweis.* Man kann den Beweis von Satz 2.14 quasi wörtlich übernehmen und so eine holomorphe Stammfunktion  $F: V \rightarrow \mathbb{C}$  von  $f|_V$  auf jeder offenen Kreisscheibe  $V \subseteq U$  konstruieren: Dabei ist lediglich die Berufung auf Lemma 2.12 durch unsere Voraussetzung über Dreieckswege zu ersetzen. Nun ist aber  $f|_V = F'$  als Ableitung einer holomorphen Funktion laut Korollar 3.3 selbst holomorph.  $\square$

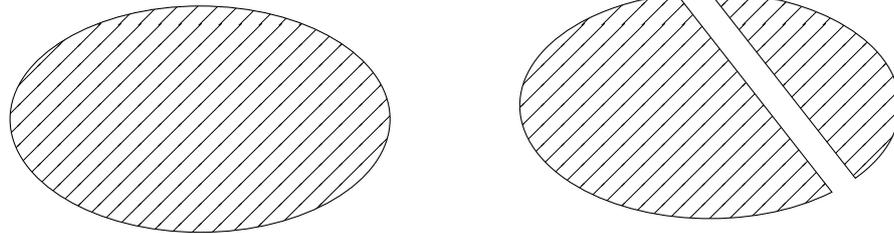
**Bemerkung.** Achtung: Die Voraussetzungen von Satz 3.6 wollen insbesondere  $\Delta_0 \subset U$ . Insbesondere wird das Verschwinden von  $\int_{\partial\Delta_0} f(z) dz$  in der folgenden Situation nicht gefordert:



(Das Dreieck  $\Delta_0$  liegt hier nämlich nicht in  $U$ , obgleich dies für seinen Rand doch der Fall ist.)

### 3.4. Der Identitätssatz

Man erinnere sich zunächst an den topologischen Begriff des *Zusammenhangs*: siehe Aufgabe T1.1 für die Begriffsdefinition, sowie ein geometrisches Kriterium, welches zum Nachweis von Zusammenhang herangezogen werden kann. Eine *zusammenhängende* offene Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  heißt **Gebiet** (vgl. Abbildung 13).



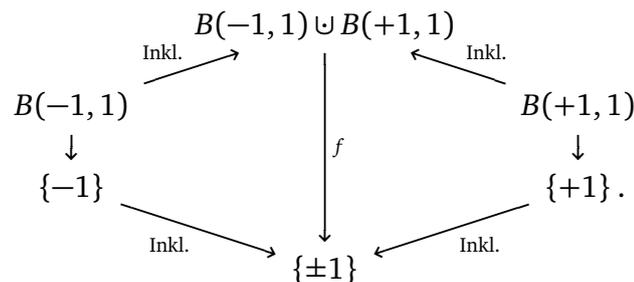
(a) zusammenhängend;

(b) nicht zusammenhängend.

**Abbildung 13.** Illustration zum Zusammenhangsbegriff.

Der Zusammenhangsbegriff ist das richtige topologische Werkzeug, um von *lokalen* Eigenschaften auf *globale* Eigenschaften zu schließen:

**Beispiel.** Es sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine lokal konstante, stetige Funktion auf einer offenen Menge  $U$ , d.h. um jeden Punkt  $z_0 \in U$  gibt es eine offene Umgebung  $V$  für die  $f|_V: V \rightarrow \mathbb{C}$  konstant ist. Folgt dann bereits, dass  $f$  global auf  $U$  konstant sein muss? — Nein! Man wähle beispielsweise  $U = B(-1, 1) \cup B(+1, 1)$ ,  $f|_{B(-1, 1)}$  konstant  $-1$  und  $f|_{B(+1, 1)}$  konstant  $+1$ :



Fordert man allerdings, dass  $U$  zusammenhängend ist, so verschwinden alle möglichen Gegenbeispiele: ist  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  nämlich stetig und lokal konstant und  $w_0 \in f(U)$ , so ist  $f^{-1}(\{w_0\})$  offen, aber auch  $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{w_0\})$ . Wegen

$$U = \underbrace{f^{-1}(\{w_0\})}_{\neq \emptyset} \cup f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{w_0\})$$

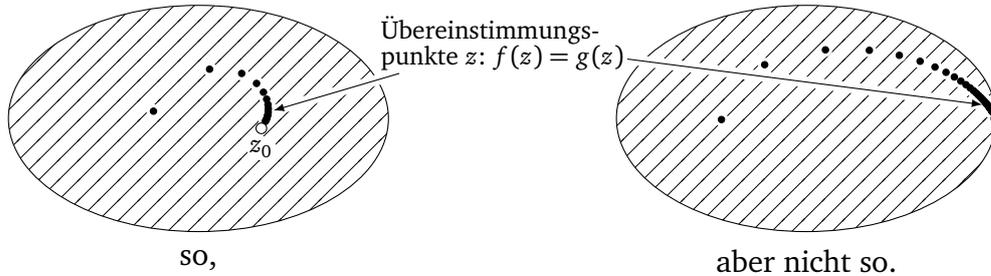
folgt nun  $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{w_0\}) = \emptyset$  aus dem Zusammenhang von  $U$  und also  $f^{-1}(\{w_0\}) = U$  (d.h.  $f$  ist konstant  $w_0$ ).

**Satz 3.7** (Identitätssatz). Für je zwei holomorphe Funktionen  $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $U \neq \emptyset$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

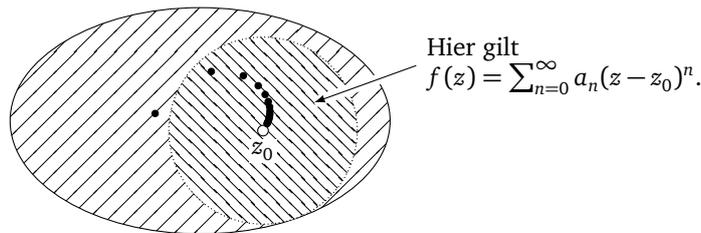
- (1)  $f = g$ ;
- (2) Die Menge  $\{z \in U : f(z) = g(z)\}$  besitzt einen Häufungspunkt in  $U$ ;
- (3) Es gibt ein  $z_0 \in U$  derart, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  die Gleichung  $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$  besteht.

*Beweis.* Indem man  $f$  durch  $f - g$  ersetzt, dürfen wir uns im Folgenden auf den Fall beschränken, bei dem  $g = 0$  die Nullabbildung  $U \rightarrow \{0\}$  ist. Wir zeigen die Implikationskette „(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1)“, bemerken allerdings sofort, dass die Implikation „(1) $\Rightarrow$ (2)“ trivial ist.

Es gelte nun (2), d.h. die Menge  $\mathcal{N} = \{z \in U : f(z) = 0\}$  besitze einen Häufungspunkt  $z_0 \in U$ :



Dann gibt es eine Folge  $(z_k)$  von Elementen von  $\mathcal{N}$  mit  $z_k \rightarrow z_0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Nun sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  die Potenzreihenentwicklung von  $f$  um  $z_0$ , welche  $f$  in einer Umgebung von  $z_0$  darstellt (siehe Satz 3.2):



Wegen der Stetigkeit von  $z_0$  ist

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} z_k) = f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0,$$

also  $a_0 = 0$ . Dort wo  $f$  durch seine Potenzreihenentwicklung um  $z_0$  dargestellt wird, ist somit auch die Funktion  $f_1: z \mapsto f(z)/(z - z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-1}$  definiert und somit in einer Umgebung von  $z_0$  holomorph. Mit demselben Argument von eben angewandt auf  $f_1$  statt  $f$  erhalten wir nun  $a_1 = 0$  und mittels Induktion dann  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$ , usw. Wegen  $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$  folgt (3).

Nun gelte (3). Wir betrachten die Menge  $\text{HP}(\mathcal{N})$  aller Häufungspunkte von  $\mathcal{N}$ . Unsere eben ausgeführte Überlegung zeigt, dass  $f$  auf einer Umgebung von  $z_0 \in \text{HP}(\mathcal{N})$  durch eine Potenzreihe mit lauter verschwindenden Koeffizienten — also durch die Nullabbildung — dargestellt wird. Also ist  $\text{HP}(\mathcal{N})$  offen. Trivialerweise ist aber das Komplement von  $\text{HP}(\mathcal{N})$  in  $U$ , also die Menge aller  $z \in U$ , die *kein* Häufungspunkt von  $\mathcal{N}$  sind, offen. Da  $U$  zusammenhängend und  $\text{HP}(\mathcal{N})$  nicht leer ist, folgt hieraus  $U = \text{HP}(\mathcal{N})$ , also (1).  $\square$

Wir geben eine recht typische Anwendung des Identitätsprinzips:

**Beispiel** (Additionstheoreme für Sinus und Kosinus). Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  benutzen wir (1.7), sowie Satz 1.7 (1):

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \\ &= \exp(i(\alpha + \beta)) = \exp(i\alpha) \exp(i\beta) \\ &= (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) \\ &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) + i(\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)). \end{aligned}$$

Nehmen wir nun zusätzlich an, dass  $\alpha$  und  $\beta$  reellwertig sind, so schließen wir durch einen Vergleich von Real- und Imaginärteilen

$$(3.1) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta),$$

$$(3.2) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta).$$

Für komplexwertige  $\alpha$  bzw.  $\beta$  scheitert das obige Vergleichsargument, beispielsweise  $\cos(\alpha + \beta)$  nicht mehr reellwertig zu sein braucht. Dennoch kann man das Argument mit Hilfe des Identitätsprinzips retten: Wir betrachten zunächst für fixiertes, reelles  $\beta$  die beiden ganzen Funktionen

$$f: z \mapsto \cos(z + \beta), \quad \text{und} \quad g: z \mapsto \cos(z) \cos(\beta) - \sin(z) \sin(\beta).$$

Dank (3.1) stimmen  $f$  und  $g$  jedenfalls auf  $\mathbb{R}$  überein und da  $\mathbb{R}$  einen Häufungspunkt im Definitionsbereich ( $= \mathbb{C}$ ) von  $f$  und  $g$  besitzt und jener Definitionsbereich zusammenhängend ist, folgt  $f = g$  gemäß Satz 3.7. Aus Symmetriegründen können wir nun für  $f$  und  $g$  wie oben, aber mit komplexem(!)  $\beta$ , die Gleichheit  $f|_{\mathbb{R}} = g|_{\mathbb{R}}$  als bewiesen ansehen und erhalten erneut  $f = g$ . Insgesamt folgt die Gültigkeit von (3.1) für sämtliche komplexe Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$ , obgleich dies zunächst nur für reelle Werte bewiesen wurde. (Analoge Überlegungen greifen selbstverständlich auch für (3.2).)

### 3.5. Verhalten bei Nullstellen

Es sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Ferner sei  $z_0 \in U$ . Nach Satz 3.7 ist  $f$  entweder konstant in der Zusammenhangskomponente von  $U$ , welche  $z_0$  enthält, oder es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ . Das *kleinste* solche  $k$  nennen wir die **Nullstellenordnung von  $f$  bei  $z_0$**  und schreiben hierfür  $\text{ord}_f(z_0) = k$ . (Falls  $f$  bei  $z_0$  lokal konstant ist, so schreiben wir formal  $\text{ord}_f(z_0) = \infty$ .) Offensichtlich ist  $f(z_0) = 0$  genau dann wenn  $\text{ord}_f(z_0) > 0$  gilt.

Wir sagen  $f$  habe bei  $z_0$  **endliche Nullstellenordnung**, falls  $\text{ord}_f(z_0) < \infty$  gilt und nennen  $z_0$  dann eine  **$k$ -fache Nullstelle** von  $f$  (einfach, doppelt, dreifach, etc.), falls  $k = \text{ord}_f(z_0)$  ist.

**Beispiele.**

- $\text{ord}_{z \mapsto 1}(z_0) = 0$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,
- $\text{ord}_{z \mapsto 0}(z_0) = \infty$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,
- $\text{ord}_{\text{id}_{\mathbb{C}}}(z_0) = 0$  für  $z_0 \neq 0$  und  $= 1$  für  $z_0 = 0$ ,

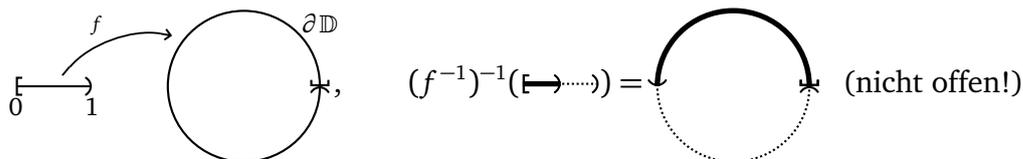
- $\text{ord}_{z \mapsto z^2}(z_0) = 0$  für  $z_0 \neq 0$  und  $= 2$  für  $z_0 = 0$ ,
- $\text{ord}_{\sin}(0) = 1$ , wie man der Potenzreihendarstellung des Sinus um den Entwicklungspunkt 0 entnimmt:  $\sin(z) = z - \frac{1}{6}z^3 \pm \dots$

**Bemerkung 3.8.** Sind  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  zwei auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  holomorphe Funktionen. Dann gilt  $\text{ord}_{f \cdot g}(z_0) = \text{ord}_f(z_0) + \text{ord}_g(z_0)$  für jedes  $z_0 \in U$ . (Beweis: Man entwickle  $f$  und  $g$  jeweils in Potenzreihen um  $z_0$  und bilde deren Cauchy-Produkt. Man erhält eine Potenzreihe für  $f \cdot g$  um  $z_0$ , deren erster nichtverschwindender Koeffizient den Index  $\text{ord}_f(z_0) + \text{ord}_g(z_0)$  hat.)

**Bemerkung.** Wie oben erwähnt, folgt aus dem Identitätssatz (Satz 3.7), dass sich Nullstellen einer nichtkonstanten, holomorphen Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $U$  nicht in  $U$  häufen können. Das Häufen von Nullstellen zum Rand  $\partial U$  hin ist allerdings möglich, wie das Beispiel  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sin(1/z)$  lehrt (betrachte  $z = 1/(n\pi)$  für  $n = 1, 2, \dots$ ).

Eine Abbildung  $f: U \rightarrow V$  zwischen offenen Mengen  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  heißt **biholomorph**, falls  $f$  bijektiv und holomorph ist und die Umkehrabbildung  $f^{-1}: V \rightarrow U$  ebenfalls holomorph ist.

**Bemerkung.** Die Topologie ermahnt uns hier zur Vorsicht: Bekanntlich ist ein Homöomorphismus  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen eine bijektive stetige Abbildung, deren Umkehrfunktion  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  ebenfalls stetig ist. Dabei ist die letzte Forderung wichtig: So ist beispielsweise die Abbildung  $f: [0, 1) \rightarrow \partial \mathbb{D}, t \mapsto \exp(2\pi it)$ , des halboffenen Intervalls  $[0, 1)$  auf den Einheitskreisrand  $\partial \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  eine stetige<sup>3</sup> Bijektion, aber kein Homöomorphismus, da ihre Umkehrabbildung nicht stetig ist: In der Tat ist etwa das Urbild der in  $[0, 1)$  offenen Menge  $[0, 1/2)$  unter  $f^{-1}$  nicht offen in  $\partial \mathbb{D}$  (es handelt sich um  $\{1\} \cup \{z \in \partial \mathbb{D} : \text{Im } z > 0\}$  und 1 ist [bezüglich der Topologie auf  $\partial \mathbb{D}$ ] kein innerer Punkt dieser Menge).



Tatsächlich treten derartige Schwierigkeiten bei holomorphen Funktionen nicht auf. Überall dort wo die Ableitung einer holomorphen Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  nicht verschwindet, ist  $f$  auch lokal umkehrbar (siehe Aufgabe 1.1 (b)). Problematisch wären also höchstens Punkte an denen  $f'$  verschwindet. Für injektive holomorphe Funktionen kann dies allerdings nicht passieren, wie wir noch in Kürze zeigen (siehe Korollar 3.11). Eine bijektive holomorphe Funktion ist also automatisch schon biholomorph.

<sup>3</sup>Selbstverständlich sind  $[0, 1)$  und  $\partial \mathbb{D}$  jeweils mit der Teilraumtopologie bezüglich  $\mathbb{R}$  respektive  $\mathbb{C}$  zu verstehen.

Der nächste Satz besagt, dass sich  $n$ -fache Nullstellen ( $n \geq 2$ ) auf *einfache* Nullstellen reduzieren lassen:

**Satz 3.9** (Normalform bei Nullstellen). *Es sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  mit einer Nullstelle von endlicher Ordnung bei  $z_0 \in U$  (also  $\text{ord}_f(z_0) \in \mathbb{N}$ ). Dann gibt es eine auf in einer offenen Umgebung  $U' \subseteq U$  von  $z_0$  holomorphe Funktion  $h: U' \rightarrow \mathbb{C}$  mit einfacher Nullstelle in  $z_0$  und*

$$h(z)^{\text{ord}_f(z_0)} = f(z)$$

für alle  $z \in U'$ . Überdies kann man es durch geeignete Verkleinerung von  $U'$  so einrichten, dass  $h$  die Menge  $U'$  biholomorph auf eine offene Kreisscheibe um 0 abbildet.

*Beweis.* Wir schreiben zur Abkürzung  $k = \text{ord}_f(z_0)$ . Anhand von Satz 3.2 sehen wir, dass wir  $f$  in einer Umgebung  $U' \subseteq U$  von  $z_0$  durch eine Potenzreihe der Form  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  mit  $a_k \neq 0$  darstellen können. (Man beachte hier den Start der Summation bei  $n = k$ !) Wir haben also

$$f(z) = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k} =: (z - z_0)^k g(z)$$

für alle  $z \in U'$ . Man würde nun gerne „ $h(z) = (z - z_0) \sqrt[k]{g(z)}$ “ setzen hat aber Probleme mit der Mehrdeutigkeit der komplexen Wurzel: Es gilt schließlich für *jedes*  $z$  in einer geeigneten Umgebung von  $z_0$  eine komplexe Zahl „ $\sqrt[k]{g(z)}$ “ auszuwählen (hier hat man im Fall  $g(z) \neq 0$  genau  $k$  Möglichkeiten) und es ist *a-priori* nicht klar, ob dies so möglich ist, dass man am Ende eine *holomorphe* Funktion bekommt. Die nachfolgenden Argumente zeigen, dass man — mit geeigneter Vorsicht — doch Herr über dieses Problem werden kann.

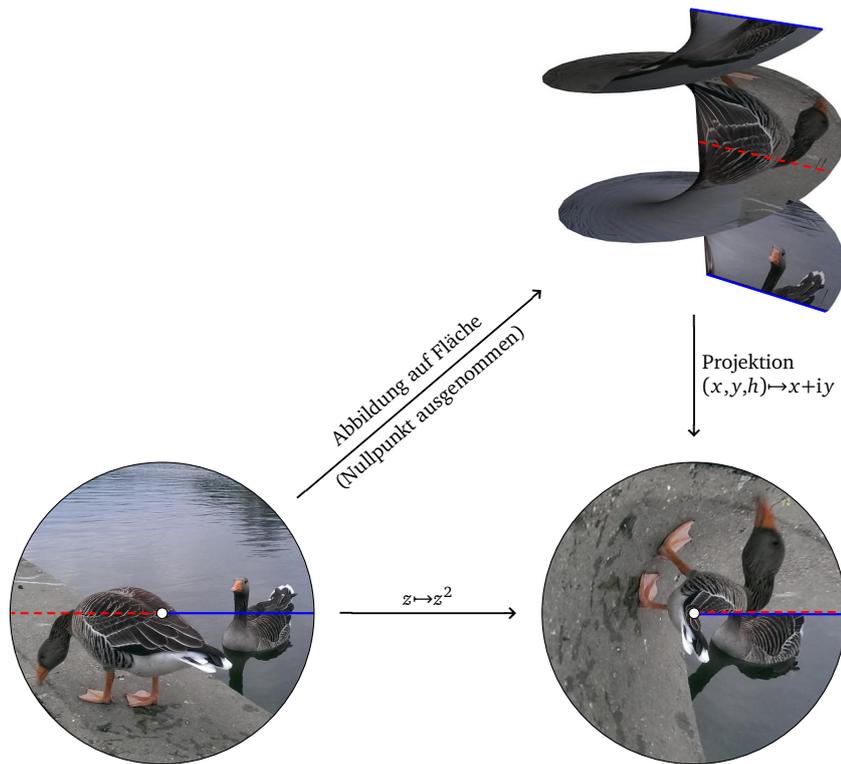
Die „ $k$ -te Potenz“-Funktion  $p_k: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^k$  ist (wie man etwa aus Satz 1.7 folgern kann) surjektiv. Es gibt also ein  $w \in \mathbb{C}$  mit  $w^k = p_k(w) = a_k$ . Dort gilt  $p'_k(w) = kw^{k-1} \neq 0$  (wegen  $a_k \neq 0$ ) und gibt es eine hinreichend kleine Umgebung  $W \subseteq \mathbb{C}$  um  $w$  derart, dass  $p_k|_W: W \rightarrow p_k(W)$  biholomorph ist. Es bezeichne  $\sqrt[k]{\cdot}: p_k(W) \rightarrow W$  ihre Umkehrfunktion. Die Funktion  $g: U' \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt  $g(z_0) = a_k$  aus Stetigkeitsgründen dürfen wir durch etwaige Verkleinerung von  $U'$  davon ausgehen, dass gar  $g(U')$  ganz in  $p_k(W)$  enthalten ist. Wir setzen dann  $h(z) = (z - z_0) \cdot (\sqrt[k]{\cdot} \circ g)(z)$ . Offensichtlich ist nun

$$h(z)^k = (z - z_0)^k \cdot (p_k \circ \sqrt[k]{\cdot} \circ g)(z) = (z - z_0)^k g(z) = f(z),$$

wie gewünscht und mit Bemerkung 3.8 folgert man leicht, dass  $h$  bei  $z_0$  eine einfache Nullstelle besitzt.

Wir haben  $h(z_0) = 0$  und  $h'(z_0) = w \neq 0$ , wie eine einfache Rechnung bestätigt. Darum ist  $h$  bei  $z_0$  lokal biholomorph (siehe Aufgabe 1.1 (b)) und durch etwaige Verkleinerung von  $U'$  dürfen wir davon ausgehen, dass  $h$  die Menge  $U'$  biholomorph auf eine offene Kreisscheibe abbildet.  $\square$

**Korollar 3.10** (Blätterzahl bei einer  $k$ -fachen Nullstelle). *Es sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $z_0$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $f$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Dann gibt es zu jedem hinreichend kleinen  $\epsilon > 0$  eine offene Umgebung  $U_\epsilon$  von  $z_0$  derart, dass  $f$  die Menge  $U_\epsilon$  surjektiv auf  $B(0, \epsilon)$  abbildet und jedes  $z \in B(0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$  genau  $k$  Urbilder unter  $f|_{U_\epsilon}$  besitzt.*



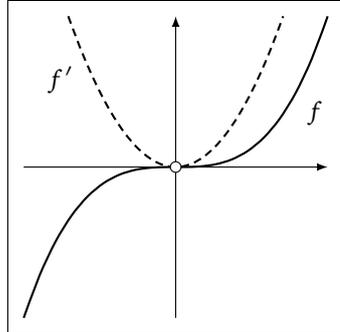
**Abbildung 14.** Illustration zu Korollar 3.10 und dem Begriff der „Blätterzahl.“ Unter der Abbildung  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto z^2$ , hat jeder Punkt  $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  genau zwei Urbilder.

**Korollar 3.11.** *Es sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  injektiv. Dann ist  $f'(z_0) \neq 0$  für alle  $z_0 \in U$ .*

*Beweis.* Es sei  $z_0 \in U$  beliebig und  $w_0 = f(z_0)$ . Offensichtlich hat  $g = f - w_0: z \mapsto f(z) - w_0$  eine Nullstelle in  $z_0$ . Aus Korollar 3.10 und der Injektivität von  $f$  folgt  $\text{ord}_g(z_0) = 1$ , also  $0 \neq g'(z_0) = f'(z_0)$ . □

Man beachte, dass — wie man durch Betrachtung von  $f = \exp$  sehen kann — eine holomorphe Funktion ohne Ableitungsnullstellen (global) nicht injektiv zu sein braucht („lokal“ hat man aber bekanntlich Injektivität, wie etwa Aufgabe 1.1 (b) garantiert).

**Bemerkung.** Man kontrastiere Korollar 3.11 mit der Situation im Reellen: So ist beispielsweise die Abbildung  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ , bijektiv (also insbesondere injektiv), besitzt allerdings bei 0 eine Ableitungsnullstelle.



Im Komplexen ist die Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^3$ , allerdings natürlich nicht injektiv: Jeder Punkt  $w \neq 0$  hat genau drei verschiedene Urbilder.

### 3.6. Gebietstreue und Maximumprinzip

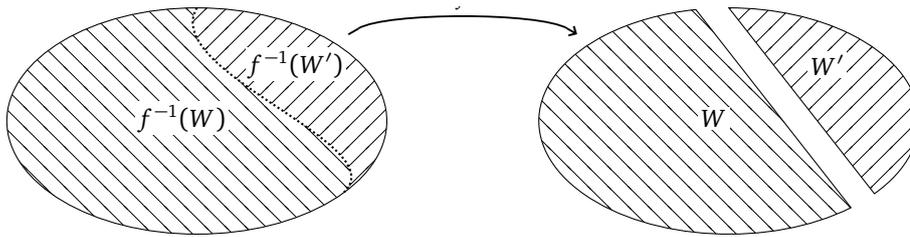
**Satz 3.12** (Gebietstreue). *Es sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$  und nicht konstant. Dann ist auch  $f(U)$  ein Gebiet.*

*Beweis.* Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind selbst wieder zusammenhängend; So viel sollte aus der Topologie bekannt sein. (Falls nicht, siehe Abbildung 15 für eine Beweisskizze.) Es verbleibt also nur die Offenheit von  $f(U)$  nachzuweisen. Hierzu sei  $w \in f(U)$ . Dann gibt es  $z_0 \in U$  mit  $f(z_0) = w$  und die Abbildung  $f-w: U \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z)-w$  ist holomorph mit Nullstelle bei  $z_0$ . Die Nullstellenordnung von  $f-w$  bei  $z_0$  muss aber endlich sein, da  $f-w$  sonst auf der (zusammenhängenden) Menge  $U$  konstant wäre und dies in den Voraussetzungen des Satzes ausgeschlossen wurde. Also ist  $\text{ord}_{f-w}(z_0) \in \mathbb{N}$  und Korollar 3.10 liefert  $B(0, \epsilon) \subseteq (f-w)(U)$  für alle hinreichend kleinen  $\epsilon > 0$ . Demnach ist  $B(w, 0) \subseteq f(U)$  und  $f(U)$  ist offen.  $\square$

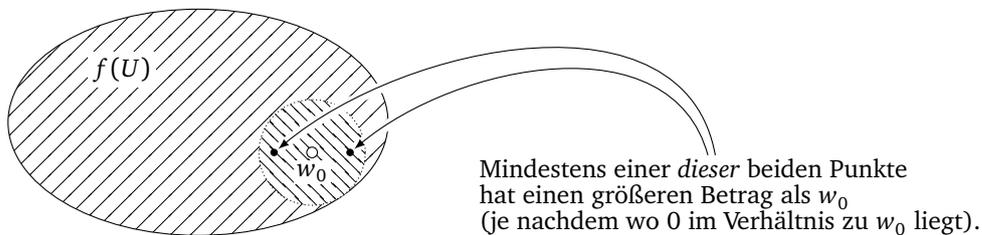
**Satz 3.13** (Maximumprinzip). *Es sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$  und nicht konstant. Dann nimmt  $f$  auf  $U$  kein Betragsmaximum an, d.h. es gibt kein  $z_0 \in U$  derart, dass für alle  $z \in U$  die Ungleichung  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$  erfüllt ist.*

*Beweis.* Laut Satz 3.12 enthält das Bildgebiet  $f(U)$  um jeden seiner Punkte  $w_0$  eine offene Kreisscheibe  $B(w_0, \epsilon)$  ( $\epsilon > 0$ ). Die Aussage des Satzes folgt damit unmittelbar aus der Tatsache, dass jede Kreisscheibe  $B(w_0, \epsilon) \subseteq \mathbb{C}$  ( $w_0 \in \mathbb{C}, \epsilon > 0$ ) eine komplexe Zahl enthält, welche einen größeren Betrag besitzt als der Mittelpunkt  $w_0$  (siehe hierzu Abbildung 16).  $\square$

**Korollar 3.14.** *Es sei  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt mit nichtleerem Inneren  $K^\circ$ ,  $f: K \rightarrow \mathbb{C}$  stetig auf  $K$ , holomorph auf  $K^\circ$  und nicht konstant. Dann nimmt  $f$  ein Betragsmaximum auf dem*



**Abbildung 15.** Illustration zum Beweis, dass stetige Bilder zusammenhängender Räume zusammenhängend sind: Jede disjunkte offene Zerlegung des Bildes lässt sich mittels  $f$  zu einer disjunkten offenen Zerlegung des ursprünglichen Raums zurückziehen, was aber dem Zusammenhang dieses Raumes widerspricht, sofern die Zerlegung nicht ohnehin trivial war. Salopp gesagt: Stetige Abbildungen können zusammenhängende Räume nicht „zerreißen.“



**Abbildung 16.** Illustration zum Beweis von Satz 3.13: Jeder Punkt  $w_0 \in f(U)$  im Bildgebiet einer nichtkonstanten holomorphen Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein innerer Punkt und kann darum kein Betragsmaximum stiften.

Rand  $\partial K$  von  $K$  an und es gilt

$$|f(z)| < \max_{z_0 \in \partial K} |f(z_0)|$$

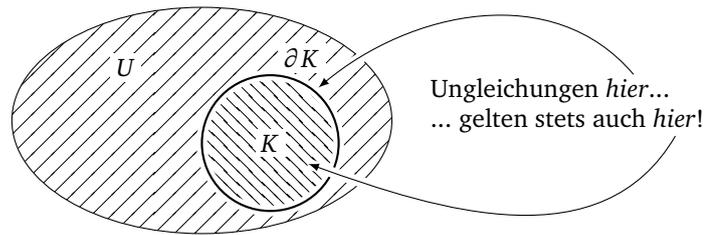
für alle  $z \in K^\circ$ . (Man beachte: In der obigen Ungleichung steht „ $<$ “ und nicht „ $\leq$ “.)

*Beweis.* Die stetige Funktion  $|f|: K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto |f(z)|$  nimmt auf der kompakten Menge  $K$  selbstverständlich ein Maximum an. Dieses kann wegen Satz 3.13 jedoch nicht auf  $K^\circ$  angenommen werden. Hieraus ergibt sich auch schon die Behauptung.  $\square$

Für eine alternative Herleitung von Satz 3.13 und Korollar 3.14 siehe Aufgabe 5.3 (insbesondere Aufgabe 5.3 (f)).

### 3.7. Isolierte Singularitäten

Schon in unseren vorangegangenen Untersuchungen führte das Studium holomorpher Funktionen  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  oft auf Funktionen, die nicht auf  $U$ , sondern auf  $U \setminus \{z_0\}$



**Abbildung 17.** Illustration zu einer typischen Anwendungsweise von Korollar 3.14: Ungleichungen für  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  (holomorph) auf dem Rand  $\partial K$  einer Menge übertragen sich auf das Innere.

für ein  $z_0 \in U$  definiert waren: So liefert uns ja bereits die Cauchysche Integralformel ein derartiges Beispiel, da bei dieser der holomorphe Integrand

$$U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f(z)}{z - z_0}$$

zu integrieren ist. Weitere sehr natürlich auftretende Beispiele sind etwa durch rationale Funktionen  $z \mapsto P(z)/Q(z)$  (mit Polynomen  $P, Q \in \mathbb{C}[Z]$ ,  $Q$  nicht das Nullpolynom) gegeben: Diese sind auf ganz  $\mathbb{C}$  mit Ausnahme der Nullstellen von  $Q$  definiert, lassen sich aber unter Umständen auch auf einer größeren Menge definieren, denn wer würde sich dabei wohl fühlen zu behaupten, die rationale Funktion  $z \mapsto z/z$  ließe sich nur auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  und nicht gleich auf ganz  $\mathbb{C}$  erklären? (Ein analoges Beispiel liefert auch  $z \mapsto \sin(z)/z$ .)

In diesem Abschnitt untersuchen wir derartige Phänomene und versuchen auch das Verhalten holomorpher Funktionen  $U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  „bei“  $z_0$  näher zu beschreiben. Es sei noch erwähnt, dass es sich bei den hier vorkommenden Überlegungen natürlich nur um einen Spezialfall des allgemeineren Problems handelt, das Verhalten holomorpher Funktionen  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf dem Rand  $\partial U$  ihres Definitionsbereichs zu untersuchen.

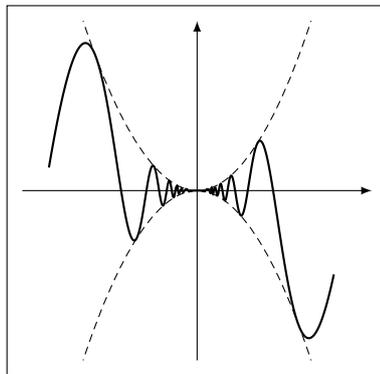
Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in U$  und  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so bezeichnet man  $z_0$  als **isolierte Singularität von  $f$** . Falls  $f$  durch Einschränkung einer holomorphen Funktion  $U \rightarrow \mathbb{C}$  auf  $U \setminus \{z_0\}$  entsteht, so nennt man die Singularität  $z_0$  von  $f$  **hebbar**. In diesem Fall schreiben wir  $\text{ord}_f(z_0) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  für die bereits bekannte Nullstellenordnung der holomorphen Fortsetzung von  $f$  bei  $z_0$ . Falls die Singularität  $z_0$  von  $f$  nicht hebbar ist, es aber ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt derart, dass die Singularität  $z_0$  von  $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$  hebbar ist, so sagt man  $f$  habe einen **Pol bei  $z_0$** . In diesem Fall heißt das kleinste  $m$  mit der obigen Eigenschaft die **Ordnung des Pols von  $f$  bei  $z_0$**  und wir schreiben  $\text{ord}_f(z_0) := -m$ . Hebt man die Singularität bei  $z_0$  von  $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$  und entwickelt die erhaltene auf  $U$  holomorphe Funktion in eine Potenzreihe um  $z_0$ ,

so erhält man nach Division durch  $(z - z_0)^m$  die Darstellung

$$(3.3) \quad \begin{aligned} f(z) &= \frac{a_m}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)^1} + a_0 + a_1(z - z_0)^1 + a_2(z - z_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \end{aligned}$$

für alle  $z \neq z_0$  in einer ganz in  $U$  enthaltenen Kreisscheibe um  $z_0$ . Ist die Singularität von  $f$  bei  $z_0$  weder hebbar noch ein Pol, so nennt man diese **wesentlich** und definiert  $\text{ord}_f(z_0) := -\infty$ . Man kann sich überlegen, dass die Rechenregel aus Bemerkung 3.8 weiterhin Bestand hat (mit der Konvention „ $(-\infty) + \infty = \infty$ “).

Aus der Analysis ist sicherlich die Standardübungsaufgabe bekannt, für eine beschränkte Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Differenzierbarkeit von  $x \mapsto x^2 f(x)$  im Nullpunkt nachzuweisen (siehe Abbildung 18). Im Komplexen hat diese einfache Überlegung wegen Korollar 3.3 eine erstaunliche Konsequenz:



**Abbildung 18.** Eine (sich vielleicht kompliziert verhaltende) Funktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $|F(x)| \leq cx^2$  (für geeignetes  $c > 0$  und alle  $x$  aus einer Umgebung von 0) ist stets in 0 differenzierbar und erfüllt dort  $F'(0) = 0$ .

**Satz 3.15** (Riemannscher Hebbarkeitssatz). *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in U$  und  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und beschränkt. Dann lässt sich  $f$  zu einer holomorphen Funktion  $U \rightarrow \mathbb{C}$  fortsetzen:*

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \text{Inkl.} \uparrow & \searrow \text{Fortsetzung von } f & \\ U \setminus \{z_0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}. \end{array}$$

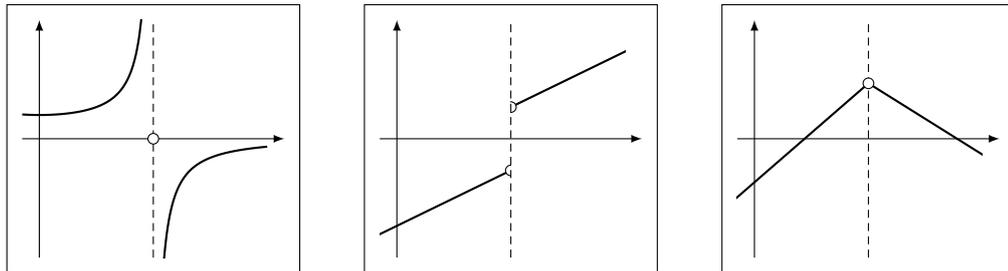
*Beweis.* Offensichtlich ist die Funktion

$$F: U \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{falls } z \neq z_0, \\ 0 & \text{falls } z = z_0. \end{cases}$$

holomorph und lässt sich daher in einer Umgebung  $U' \subseteq U$  von  $z_0$  durch eine Potenzreihe darstellen:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-2}.$$

(Für die letzte Gleichung beachte man  $F(z_0) = 0$  und  $F'(z_0) = 0$ .) Die Potenzreihe rechter Hand stellt nun aber (vgl. Definition von  $F$ ) auf  $U' \setminus \{z_0\}$  die Funktion  $F$  dar und ist auf ganz  $U'$  holomorph. Durch  $f(z_0) := F''(z_0)/2$  erhält man also die gewünschte holomorphe Fortsetzung von  $f$  in den Punkt  $z_0$ .  $\square$



(a) Unbeschränkt, also nicht stetig fortsetzbar. (b) Beschränkt, aber auch nicht stetig fortsetzbar. (c) Stetig fortsetzbar, aber nicht differenzierbar.

**Abbildung 19.** Illustration dazu, wie eine *reelle* Version des Riemannschen Hebbarkeitssatzes (Satz 3.15) zum Scheitern verurteilt ist.

**Bemerkung.** Der Riemannsche Hebbarkeitssatz ist bemerkenswert! Man beachte, dass man eine stetige Funktion  $f: U \setminus \{z_0\}$ , die um  $z_0$  herum nicht beschränkt ist, selbstverständlich nicht mal stetig nach  $z_0$  hin fortsetzen kann (für eine eindimensionale Illustration hierzu, siehe Abbildung 19 (a)). Der Riemannsche Hebbarkeitssatz besagt nun, dass diese trivialerweise notwendige Bedingung schon für holomorphe Fortsetzbarkeit hinreicht. In der gewöhnlichen reellen Analysis findet man hingegen problemlos Gegenbeispiele für dieses Phänomen (siehe Abbildung 19 (b) und Abbildung 19 (c))

**Satz 3.16** (Casorati–Weierstraß). *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in U$  und  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Die Singularität von  $f$  sei weder hebbar noch ein Pol (d.h. wesentlich). Dann ist  $f(U \cap B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}) \subseteq \mathbb{C}$  für jedes  $\epsilon > 0$  dicht in  $\mathbb{C}$ .*

*Beweis.* Angenommen es gäbe ein  $\epsilon > 0$  derart, dass  $f(U \cap B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\})$  nicht dicht in  $\mathbb{C}$  liegt. Dann gibt es also eine offene Kreisscheibe  $B(w, \delta)$ , die disjunkt zu  $f(U \cap B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\})$  ist. Insbesondere ist die Funktion

$$h: U \cap B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{f(z) - w}$$

durch  $\delta$  beschränkt und deren Singularität in  $z_0$  daher dank Satz 3.15 hebbar. Für  $m = \text{ord}_h(z_0)$  (Nullstellenordnung!) ist dann die Singularität von

$$(z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)^m \left( \frac{1}{h(z)} + w \right)$$

bei  $z_0$  ebenfalls hebbar. Also ist die Singularität von  $f$  bei  $z_0$  ein Pol (falls  $m > 0$ ) oder hebbar (falls  $m = 0$ ).  $\square$

Die oben bereits benutzte Sprechweise (erst  $U$  betrachten, dann einen Punkt ausnehmen und dann holomorphe Funktionen auf  $U$  ohne diese Punkte betrachten) ist etwas mühsam. Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $\mathcal{P} \subseteq U$  eine Menge von Punkten, die keinen Häufungspunkt in  $U$  besitzt, so nennen wir eine holomorphe Funktion  $f: U \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ , die in keinem Punkt  $z_0 \in \mathcal{P}$  eine wesentliche Singularität besitzt, auch kurz **meromorph auf  $U$** . Oft sagen wir dann nur „sei  $f$  eine auf  $U$  meromorphe Funktion“, ohne eine Menge  $\mathcal{P} \subseteq U$  von isolierten Singularitäten explizit auszuzeichnen.

Der Satz von Casorati–Weierstraß wirft die Frage auf, wie die Punktmengen aussehen können, welche von den Werten einer holomorphen Funktion in der Umgebung einer wesentlichen Singularität ausgelassen werden können; Der sogenannte „große“ *Satz von Picard* — welchen wir hier nicht beweisen werden — besagt, dass diese Ausnahmemengen entweder gar ganz *leer* oder *einelementig* sind:

**Satz** (Großer Satz von Picard). *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in U$  und  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit wesentlicher Singularität bei  $z_0$ . Dann gibt es ein  $w$  derart mit  $\mathbb{C} \setminus \{w\} \subseteq f(U \cap B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\})$  für jedes  $\epsilon > 0$ .*

**Beispiel.** Die Funktion  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \exp(1/z)$ , besitzt eine wesentliche Singularität bei 0 und lässt den Wert 0 aus.

Wenn es einen „großen“ Satz von Picard gibt, sollte es wohl auch einen „kleinen“ geben; Das ist in der Tat so:

**Satz** (Kleiner Satz von Picard). *Jede ganze Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Bildgebiet  $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$  mehr als einen Wert auslässt, ist konstant.*

Man kann sich überlegen, dass der kleine Satz von Picard aus dem großen folgt. Der kleine Satz von Picard ist wiederum offensichtlich eine deutliche Verschärfung des Satzes von Liouville (Satz 3.5), wobei letzterer ja die Konstanz jeder *beschränkten* ganzen Funktion behauptet. Man beachte, dass Beschränktheit von  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  natürlich impliziert, dass  $f(\mathbb{C})$  in einer Kreisscheibe  $B(0, r)$  enthalten sein muss und  $f$  daher keine der komplexen Zahlen in  $\mathbb{C} \setminus B(0, r)$  als Wert annimmt, also gewissermaßen sehr viele Werte auslässt.

Die oben besprochenen Sätze von Picard lassen erahnen, dass meromorphe Funktionen und deren Werteverteilung sehr starren Gesetzmäßigkeiten unterworfen sind. Die 1925 von R. Nevanlinna begründete **Nevanlinna-Theorie** deckt derartige Verbindungen zwischen dem Wachstumsverhalten von meromorphen Funktionen und

deren Werteverteilung auf, aber für eine nähere Betrachtung dieser fehlt uns hier leider die Zeit.

### 3.8. Laurentreihen

Zum besseren Verständnis von isolierten Singularitäten ist es günstig zunächst eine Art Potenzreihendarstellung herzuleiten. Wegen (3.3) und Satz 3.2 liegt die Arbeit hier höchstens noch im Fall einer wesentlichen Singularität.

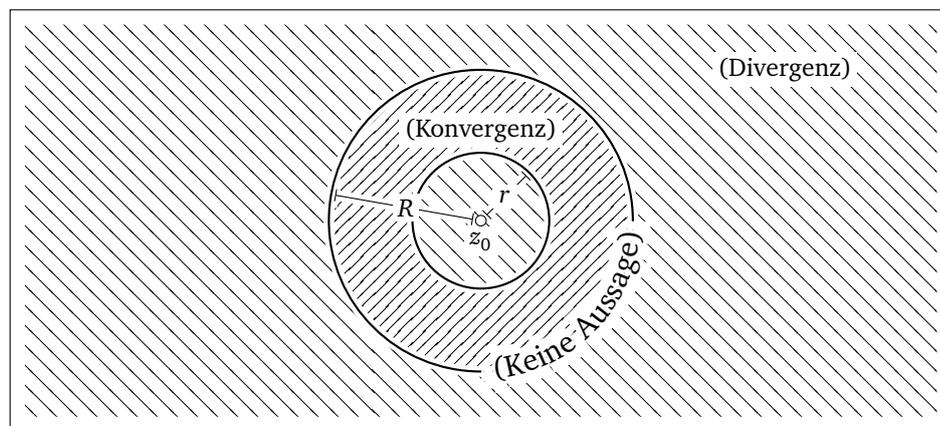
Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt **Laurentreihe** und die Zahlen  $a_n$  heißen **Laurentkoeffizienten**. Die Teilreihen

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißen **Haupt-** und **Nebenteil der Laurentreihe**. Eine Laurentreihe heißt **konvergent**, falls ihr Haupt- und Nebenteil beide(!) jeweils für sich betrachtet konvergieren. Analog definiert man **absolute** und auch **gleichmäßige Konvergenz** für Laurentreihen. Wie auch schon für Reihen üblich, unterscheiden wir sprachlich für gewöhnlich nicht zwischen einer formalen Laurentreihe (mit Koeffizientenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ) und ihrem Grenzwert, also der Summe der Grenzwerte von Haupt- und Nebenteil.



**Abbildung 20.** Illustration zum Konvergenz- und Divergenzverhalten einer Laurentreihe  $z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  um den Entwicklungspunkt  $z_0$ . Der Hauptteil konvergiert für alle  $z$  mit  $|z| > r$  und für  $|z| < r$ . Der Nebenteil konvergiert für alle  $z$  mit  $|z| < R$  und für  $|z| > R$ .

Der Nebenteil einer Laurentreihe konvergiert bekanntlich für alle  $z$  aus einer geeigneten offenen Kreisscheibe um  $z_0$  und divergiert für alle anderen  $z$ , die kein Randpunkt der angesprochenen Kreisscheibe sind (siehe Abbildung 5 auf Seite 12).

Bei dem Hauptteil handelt es sich um eine „Potenzreihe in der Variablen  $1/(z - z_0)$ “. Diese konvergiert also für alle  $z \in \mathbb{C}$  *außerhalb* einer abgeschlossenen Kreisscheibe um  $z_0$  und divergiert im (topologischen) Inneren jener Kreisscheibe (man betrachte abermals Abbildung 5 aber denke sich Konvergenz- und Divergenzbereich vertauscht). Laurentreihen konvergieren also auf *Kreisringen*

$$B(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

(vgl. Abbildung 20), wobei wir etwaige Konvergenz auf den Randpunkten solcher Ringe ignorieren wollen.

**Lemma 3.17** (Cauchysche Integralformel für Laurentkoeffizienten). *Eine holomorphe Funktion  $f: B(z_0, r, R) \rightarrow \mathbb{C}$  sei durch eine auf dem Kreisring  $B(z_0, r, R)$  konvergente Laurentreihe  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  gegeben. Dann ist für jedes  $\varrho \in (r, R)$*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \varrho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

wobei das Integral als Wegintegral über den positiv zu orientierenden Kreis  $\partial B(z_0, \varrho)$  zu verstehen ist (vgl. Satz 3.2).

*Beweis.* Da die  $f$ -definierende Laurentreihe auf jeder in  $B(z_0, r, R)$  enthaltenen kompakten Menge gleichmäßig konvergiert, liefert Lemma 2.6 für jedes  $\varrho \in (r, R)$  die Vertauschbarkeit von Integration und Summation in der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(z_0, \varrho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz &= \int_{\partial B(z_0, \varrho)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{(z - z_0)^{n+1-k}} dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\partial B(z_0, \varrho)} \frac{a_k}{(z - z_0)^{n+1-k}} dz \\ &= \dots + 0 + 2\pi i a_n + 0 + \dots = 2\pi i a_n. \end{aligned}$$

(Für die letzte Zeile beachte man, dass jeder der Integranden für  $k \neq n$  eine Stammfunktion auf  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  besitzt; siehe Beispiel 2.4.)  $\square$

Nun zeigen wir, dass sich eine auf einer punktierten Kreisscheibe  $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$  holomorphe Funktion stets in eine auf dieser Kreisscheibe konvergente Laurentreihe entwickeln lässt:

**Satz 3.18** (Laurentreihenentwicklungssatz). *Es sei  $f: B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gibt es eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  komplexer Zahlen derart, dass die Laurentreihe*

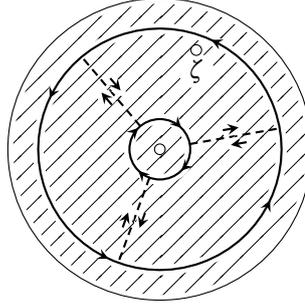
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für jedes  $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$  konvergiert und dort mit  $f(z)$  übereinstimmt. Überdies gibt es genau eine derartige Reihe, denn die Laurentkoeffizienten  $a_n$  genügen der Formel aus Lemma 3.17.

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $z_0 = 0$ . Für  $\epsilon \in (0, r/2)$  und  $\zeta \in B(z_0, r - \epsilon) \setminus \overline{B}(z_0, \epsilon)$  ist dann

$$(3.4) \quad 2\pi i f(\zeta) = \int_{\partial B(0, r-\epsilon)} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz - \int_{\partial B(0, \epsilon)} \frac{f(w)}{w-\zeta} dw,$$

wie man sich durch Anwenden von Satz 2.14 und Satz 2.15 auf die drei offensichtlichen Teilwege in der folgenden Abbildung überlegt:



In der obigen Formel schreibe man unter Beachtung von  $|\zeta/z| < 1$  und  $|w/\zeta| < 1$  die Integranden nun jeweils als

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z-\zeta} &= \frac{f(z)}{z} \frac{1}{1-\zeta/z} = \frac{f(z)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \zeta^n, \\ \frac{f(w)}{w-\zeta} &= -\frac{f(w)}{\zeta} \frac{1}{1-w/\zeta} = -\frac{f(w)}{\zeta} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w}{\zeta}\right)^m = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \zeta^n. \end{aligned}$$

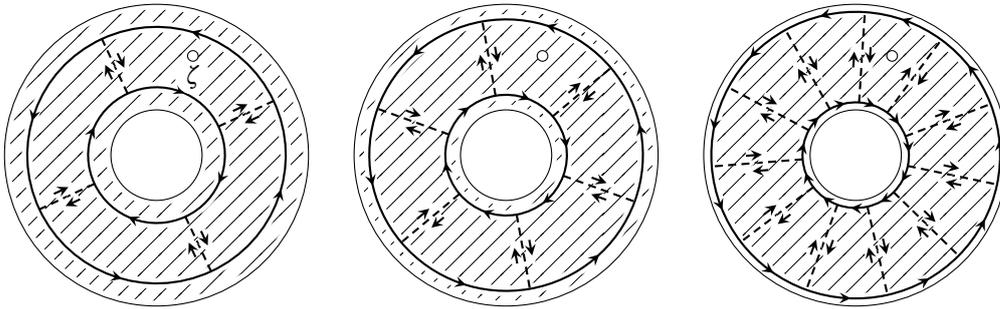
Vertauschen von Integration und Summation liefert nun, wie bereits im Beweis von Satz 3.2, dass  $f(\zeta)$  für jedes  $\zeta \in B(z_0, r - \epsilon) \setminus \overline{B}(z_0, \epsilon)$  durch eine Laurentreihe gegeben ist. *A-priori* könnten die so gewonnenen Laurentkoeffizienten natürlich von dem gewählten  $\epsilon$  abhängen, da dies ja die Wege beeinflusst, über die integriert wird, aber laut Lemma 3.17 ist dem nicht so. Durch  $\epsilon \searrow 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung** (Laurententwicklung auf Kreisringen). Man kann auch allgemeiner jede auf einem Kreisring

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

holomorphe Funktion dort in eine konvergente Laurentreihe entwickeln. Der Beweis läuft ganz analog, wobei man bei der Rechtfertigung des Analogons zu (3.4) etwas vorsichtiger argumentieren muss, um konvexe Definitionsbereiche der Integranden ausmachen zu können, wodurch ja erst die Anwendbarkeit von Satz 2.15 erreicht wird: Im obigen Beweis hat eine Aufteilung mit drei Hilfswegen genügt, aber mit

(bei  $\epsilon \searrow 0$  zunehmend) mehr Hilfswegen kommt man auch bei Kreisringen zum Ziel:



Alternativ beruft man sich auf die später noch zu besprechende Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel.

Wir betrachten zum Abschluss noch eine Anwendung von Laurentreihen (für eine weitere, siehe Aufgabe 7.1).

**Beispiel 3.19.** Zu einer ganzen Funktion  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten wir die holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto g(1/z)$  und wollen die Art der Singularität von  $f$  bei 0 bestimmen. Es sei  $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$  die Potenzreihenentwicklung von  $g$  (welche natürlich für jedes  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert). Dann erhalten wir durch Einsetzen von  $1/z$  für  $z$  die auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  konvergente Laurentreihe

$$\sum_{n=0}^{-\infty} a_{-n} z^n = g(1/z) = f(z)$$

für  $f$  um den Entwicklungspunkt 0. Wir unterscheiden drei Fälle:

- Fall 1:  $f$  habe in 0 eine hebbare Singularität. Dann setzt sich  $g$  zu einer ganzen Funktion fort und mittels Lemma 3.17 erhalten wir für  $n \geq 1$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,1)} g(z)(z - z_0)^{n-1} dz = 0$$

dank des Cauchyschen Integralsatzes. Also ist  $g = (z \mapsto a_0)$  konstant. Man überlegt sich auch sofort, dass sogar die Umkehrung gilt: Ist  $g$  konstant, so auch  $f$  und  $f$  hat also bei 0 eine hebbare Singularität.

- Fall 2:  $f$  habe in 0 einen Pol der Ordnung  $-m \leq -1$ . Mit Blick auf (3.3) (Achtung: veränderte Indizierung!) und der Eindeutigkeit der Laurentkoeffizienten (siehe Satz 3.18) ergibt sich

$$a_m \neq 0, \quad a_{m+1} = 0, \quad a_{m+2} = 0, \quad \dots;$$

Also ist  $g$  ein Polynom vom Grad  $m \geq 1$ . Auch hier sieht man wieder sofort, dass sogar die Umkehrung dieser Aussage gilt (denn ist  $g$  ein Polynom vom Grad  $m$ , so erhält man unmittelbar eine Darstellung der Form (3.3) für  $f$ ).

- Fall 3:  $f$  habe in 0 eine wesentliche Singularität. Dieser Fall ist wegen unseren Überlegungen zu den ersten beiden Fällen offensichtlich äquivalent dazu, dass die Koeffizienten  $a_m$  aus der Potenzreihenentwicklung von  $g$  für unendlich viele  $m$  von 0 verschieden sind.

**Beispiel.**  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \exp(1/z)$ , hat eine wesentliche Singularität in 0.

## KAPITEL 4

### Analytische Fortsetzung

Ziel dieses Kapitels ist es, ein besseres Verständnis für den maximalen Definitionsbereich einer bereits auf einer kleinen, offenen Menge bekannten holomorphen Funktion zu gewinnen, und zu sehen, inwieweit dieses Problem eindeutig lösbar ist, oder jedenfalls etwaige Uneindeutigkeiten zu quantifizieren. Da die Fortsetzbarkeit einer holomorphen Funktion und „das Wesen“ einer solchen Fortsetzung ganz klar von der Funktion abhängen wird, muss klar sein, dass die formulierten Ziele zu allgemein sind, um hier umfassend und abschließend gelöst zu werden. Dennoch wird sich uns hier für die konkreten Fälle von Wurzelfunktionen und Logarithmen ein recht befriedigendes Bild präsentieren. Als weiterführende Referenzen mögen vielleicht das Buch von Narasimhan [14] oder die (wirklich ausgezeichneten) Vorlesungsnotizen von Roe [16] dienen. Mehr Hintergrund zu hier noch zu entwickelnden Überlagerungstheorie findet man beispielsweise im Buch von Hatcher [8].

Als erste Motivation für die hier zu untersuchende Problemstellung betrachte man Abbildung 21. Details hierzu werden im folgenden Abschnitt erläutert.

#### 4.1. Die Garbe der Halme holomorpher Funktionskeime

Als ersten Schritt zur Betrachtung von Fortsetzungsproblemen, zerhacken wir holomorphe Funktionen gewissermaßen in ihre „infinitesimalen Bestandteile“, ähnlich wie man ein Puzzle in seine Einzelteile zerlegt. Anschließend beschäftigen wir uns mit der Frage, wie die so erhaltenen Teile wieder zusammengefügt („zusammengespuzzelt“) werden können.

Für eine offene Menge  $U$  bezeichne  $\mathcal{H}(U)$  die  $\mathbb{C}$ -Algebra<sup>1</sup> aller auf  $U$  holomorphen Funktionen  $U \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir definieren den **Halm bei  $z \in U$**  als die Äquivalenzklasse

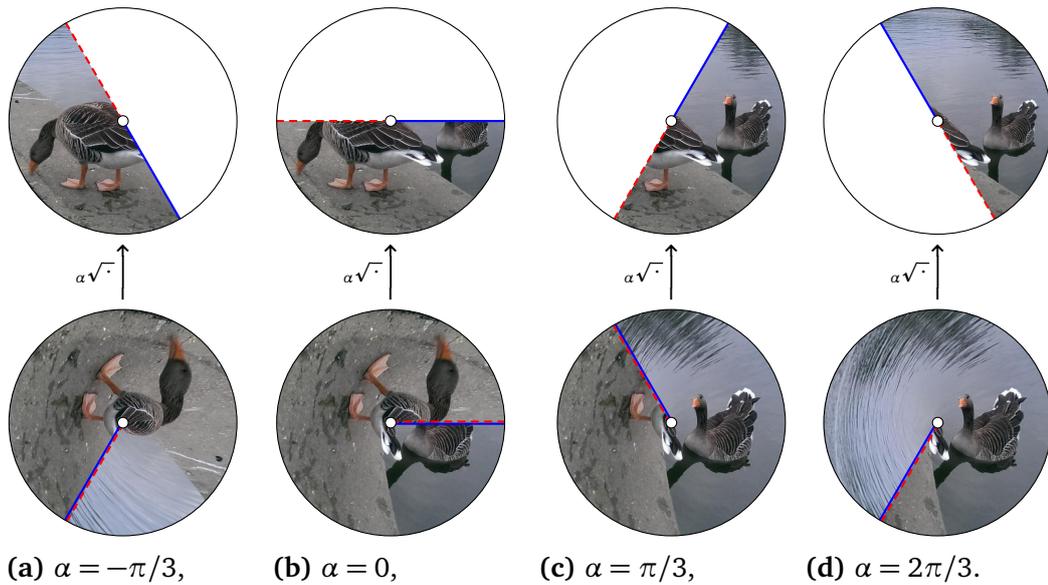
$$\mathcal{H}_z := \varinjlim_{\substack{U \text{ offen} \\ z \in U}} \mathcal{H}(U) := \{(f, U) : f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph, } z \in U\} / \sim_z,$$

wobei zwei **Funktionselemente**  $(f_1, U_1)$  und  $(f_2, U_2)$  als *äquivalent (bei  $z$ )* verstanden werden sollen, in Zeichen:

$$(f_1, U_1) \sim_z (f_2, U_2),$$

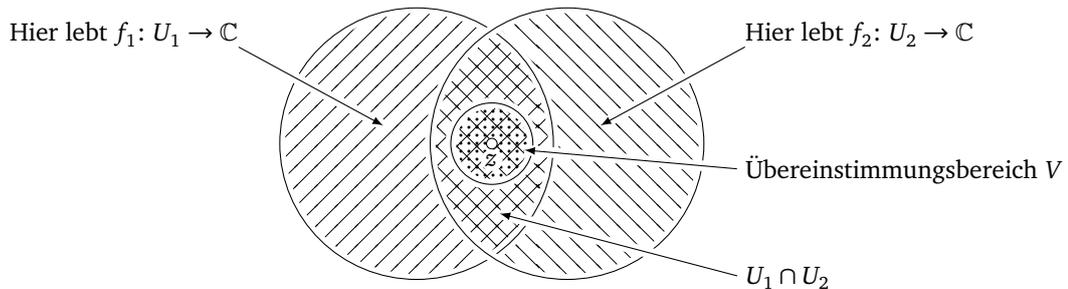
---

<sup>1</sup>Eine  $\mathbb{C}$ -Algebra ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, der zusätzlich die Struktur eines Rings (hier: kommutativ und mit Eins) trägt und diese sich mit der Vektorraumstruktur verträgt. Leserinnen und Leser, die mit diesem Konzept nicht allzu vertraut sind haben keinen großen Schaden darin gedanklich „ $\mathbb{C}$ -Algebra“ durch „Ring“ zu ersetzen.



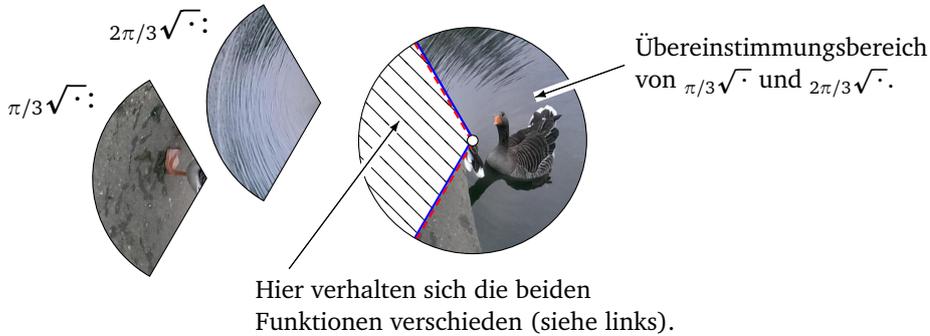
**Abbildung 21.** Illustration zu verschiedenen Möglichkeiten, die Quadraturabbildung  $p_2: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $z \mapsto z^2$ , (siehe Abbildung 14) auf diversen kleineren Definitionsbereichen  $U_\alpha$  umzukehren und so eine Wurzelfunktion  ${}_\alpha\sqrt{\cdot}: p_2(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$  zu erhalten. Gezeichnet ist jeweils das Abbildungsverhalten von  $(p_2|_{U_\alpha})^{-1}$  mit  $U_\alpha = \{r \exp(it) \in \mathbb{D} : r \in (0, 1), \alpha - \pi < t < \alpha\}$ .

falls es eine offene Menge  $V \subseteq U_1 \cap U_2$  mit  $z \in V$  und  $f_1|_V = f_2|_V$  gilt:

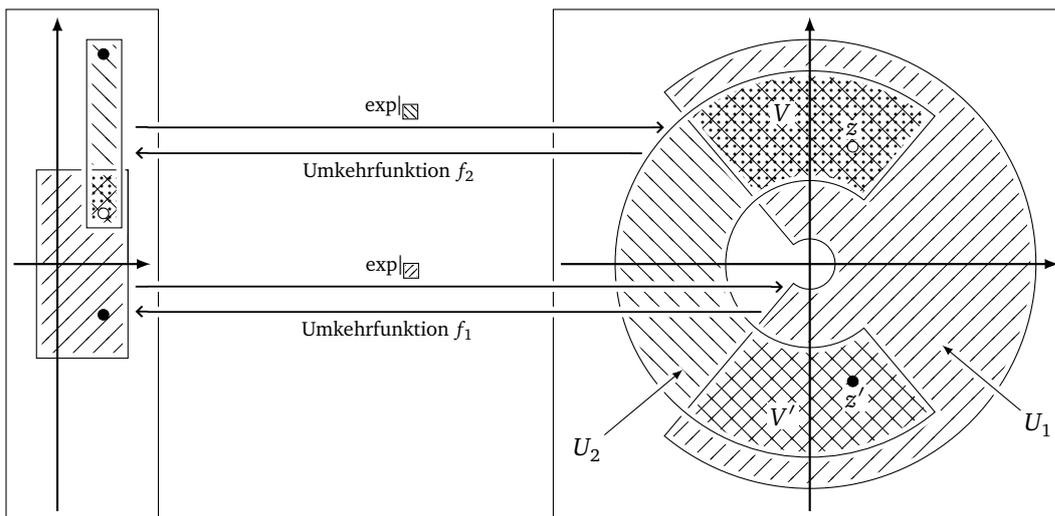


Das obige Bild ist zur Verdeutlichung der Definition von Äquivalenz von Funktionselementen sicher geeignet, aber doch etwas unbefriedigend, da Übereinstimmung auf einer Kreisscheibe um  $z_0$  (wie im obigen Bild) dank des Identitätssatzes (Satz 3.7) *a-fortiori* schon Übereinstimmung auf der in der Zeichnung offensichtlich zusammenhängenden Schnittmenge  $U_1 \cap U_2$  liefert. Spannender wird die Situation, wenn die Schnittmenge  $U_1 \cap U_2$  aus mehreren Zusammenhangskomponenten besteht und wir wollen dies noch anhand zweier (in ihrer Substanz identischen) Beispiele illustrieren.

**Beispiel** (Quadratwurzel). Die Wurzelfunktionen  $\pi/3\sqrt{\cdot}$  und  $2\pi/3\sqrt{\cdot}$  aus Abbildung 21 (c) respektive Abbildung 21 (d) haben als Definitionsbereich jeweils eine geschlitzte Einheitskreisscheibe. Der Schnitt der zugehörigen Definitionsbereiche zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten:



**Beispiel** (Logarithmus). Wir betrachten  $f_1$  und  $f_2$  als die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktion eingeschränkt auf die im Folgenden skizzierten Bereiche:



Der Schnitt  $U_1 \cap U_2$  der Definitionsbereiche  $U_1$  und  $U_2$  von  $f_1$  und  $f_2$  besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten  $V \cup V'$ ;  $f_1$  und  $f_2$  stimmen auf  $V$  überein, aber nicht auf  $V'$ .

Elemente des Halmes  $\mathcal{H}_z$  bezeichnet man **Funktionskeime bei  $z$** . Wir notieren diese oft in der Form  $[(f, U)]_z$ , was gleich einen Repräsentanten  $(f, U)$  der zugehörigen Äquivalenzklasse (bezüglich  $\sim$ ) angibt.

**Beispiel.** In der Situation des obigen Beispiels gilt

$$[(f_1, U_1)]_z = [(f_2, U_2)]_z, \quad \text{aber} \quad [(f_1, U_1)]_{z'} \neq [(f_2, U_2)]_{z'}.$$

Der Punkt  $z$  lässt sich aus einem Keim  $[(f, U)]_z \in \mathcal{H}_z$  reproduzieren:

$$\{z\} = \bigcap_{(f_0, U_0) \in [(f, U)]} U_0,$$

und damit auch aus dem Halm selbst:

$$\{z\} = \bigcap_{\substack{[(f, U)]_z \in \mathcal{H}_z \\ (f_0, U_0) \in [(f, U)]_z}} U_0.$$

Man überlegt sich leicht, dass für jeden Keim  $[(f, U)]_z$  die Punktauswertung  $f(z)$  nicht von der Wahl des diesen repräsentierenden Funktionselements  $(f, U)$  abhängt, denn je zwei Repräsentanten des Keims stimmen ja (definitionsgemäß!) auf einer offenen Menge  $V$ , die  $z$  enthält, überein. Ferner kann man sich auch überlegen, dass  $\mathcal{H}_z$  durch

$$[(f, U)]_z + [(g, V)]_z := [(\zeta \mapsto f(\zeta) + g(\zeta), U \cap V)]_z$$

und ähnlich definierte Multiplikation und  $\mathbb{C}$ -Skalarmultiplikation zu einer  $\mathbb{C}$ -Algebra wird.

Mit demselben Argument von oben (zur Punktauswertung) sieht man, dass sogar alle Ableitungen  $f^{(n)}(z)$  bei  $z$  unabhängig von der Repräsentantenwahl ist. Zusammen mit der Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen (Satz 3.2) sieht man, dass der Halm bei  $z$  in Wahrheit ein recht konkretes Objekt ist: Bei der Abbildung

$$(4.1) \quad \begin{aligned} &\mathcal{H}_z \longrightarrow \{\text{Potenzreihen in } \zeta \text{ um } z \text{ mit pos. Konvergenzradius}\}, \\ &[(f, U)]_z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (\zeta - z)^n \quad (\text{Variable} = \zeta) \end{aligned}$$

handelt es sich um einen Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Algebren.

Wir definieren nun den *étalé-Raum* (*espace étalé*, Französisch für „ausgebreiteter Raum“) als die disjunkte Vereinigung aller Halme auf  $U$ :

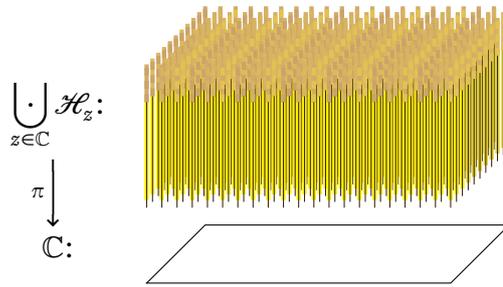
$$\bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z.$$

Wir erhalten somit eine Abbildung  $\pi$  derart, dass für jedes  $z \in \mathbb{C}$  das folgende Diagramm kommutiert:

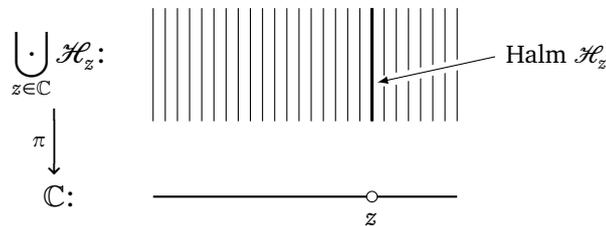
$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z & \xleftarrow{\text{Inkl.}} & \mathcal{H}_z \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xleftarrow{\text{Inkl.}} & \{z\}. \end{array}$$

(Die Abbildung  $\pi$  arbeitet so: Jedes Element des étalé-Raumes ist Element von  $\mathcal{H}_z$  für ein eindeutig bestimmtes  $z \in \mathbb{C}$  und auf dieses  $z$  wird jenes Element von  $\pi$  abgebildet.)

Wir stellen uns den étalé-Raum als eine „Garbe“<sup>2</sup> von Halmen vor, die oberhalb der Punkte  $z \in \mathbb{C}$  gebündelt sind:



Eindimensional hat man dabei ggf. das folgende Bild im Kopf:

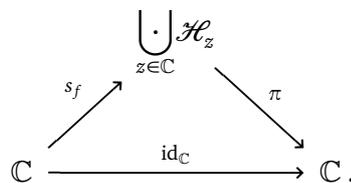


(Man behalte allerdings — mit Blick auf (4.1) — im Hinterkopf, dass jeder hier gezeichnete Halm natürlich eine „sehr große“ Menge darstellt und dieses Bild also viel Information in wenig Platz drückt.)

Jede holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  induziert eine Abbildung

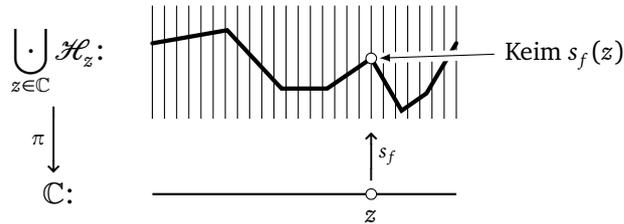
$$(4.2) \quad s_f: \mathbb{C} \longrightarrow \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z, \quad z \longmapsto [(f, \mathbb{C})]_z,$$

und diese erfüllt  $\pi \circ s_f = \text{id}_{\mathbb{C}}$ , bzw. visualisiert anhand eines kommutativen Diagramms:

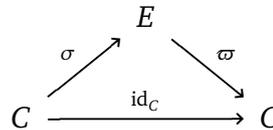


<sup>2</sup>In der Landwirtschaft ist eine „Garbe“ ein Bündel aus Getreidehalmen. In der Mathematik gibt es auch den Begriff einer Garbe und die Namensgebung ist genau an die hier gezeichneten Bilder angelehnt, doch handelt es sich bei dem étalé-Raum streng genommen nicht um eine Garbe. (Beide Konzepte sind allerdings sehr eng miteinander verwandt.)

Man nennt  $s_f$  auch einen **Schnitt von  $\pi$** . (Etwas unpräzise bezeichnet man  $f$  auch als Schnitt des étalé-Raumes.) Dabei hat man das folgende Bild im Kopf:



Der Begriff „Schnitt“ ist ganz allgemein definiert. Ist

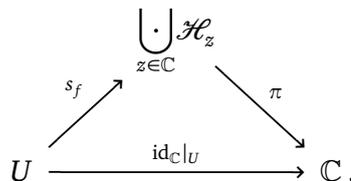


ein kommutatives Diagramm von Mengen, so bezeichnet man  $\sigma$  als **Schnitt von  $\omega$** . Sind  $C$  und  $E$  sogar topologische Räume und  $\omega$  stetig, so stellt man, sofern nicht explizit Gegenteiliges gesagt wird, noch die Zusatzvoraussetzung, dass  $\sigma$  ebenfalls stetig sein möge, um Schnitt genannt werden zu dürfen. Ganz ähnlich verhält es sich mit anderen „Kategorien“ (z.B. Gruppen mit Gruppenhomomorphismen, differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit differenzierbaren Abbildungen, Vektorräumen mit linearen Abbildungen etc.).

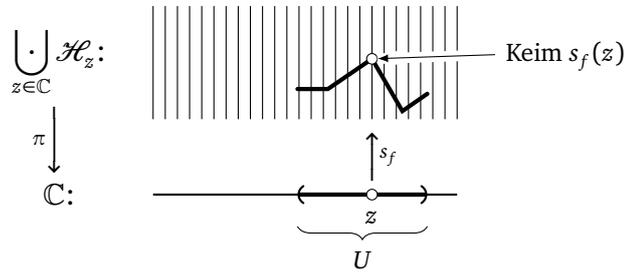
Als nächstes beschäftigen wir uns mit holomorphen Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ , die nur auf einer offenen Teilmenge  $U$  der komplexen Zahlen, aber nicht notwendigerweise auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert sind. Analog zu (4.2) erhält man eine Abbildung

$$s_f: U \longrightarrow \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z, \quad z \longmapsto [(f, \mathbb{C})]_z,$$

aber nur das kommutative Diagramm



(Man beachte die Definitionsbereiche!) Man stellt sich die Situation wie folgt vor:



Aus offensichtlichen Gründen bezeichnet man  $s_f$  auch einen **lokalen Schnitt von  $\pi$  (über  $U$ )**. Lokale Schnitte von  $\pi$  über  $\mathbb{C}$  nennen wir auch **globale Schnitte**. (Schnitte  $s_f$  zu holomorphen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  nennt man dementsprechend auch gerne **globale Schnitte**.)

Wir führen nun eine Topologie auf dem étalé-Raum ein. Als Subbasis von offenen Mengen wählen wir die Gesamtheit aller Mengen

$$N(f, U) = \{ [(f, U)]_z : z \in U \}$$

für alle offenen Mengen  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $f \in \mathcal{H}(U)$ . Für eine beliebige weitere holomorphe Funktion  $g: V \rightarrow \mathbb{C}$  (mit  $V \subseteq \mathbb{C}$  offen) ist das Urbild

$$s_g^{-1}(N(f, U)) = \{ z \in U \cap V : [(g, V)]_z = [(f, U)]_z \}$$

offen in  $\mathbb{C}$ , denn zu jedem Punkt  $z \in U \cap V$  mit  $[(g, V)]_z = [(f, U)]_z$  wird eben jede Gleichung auch für alle Punkte  $\tilde{z}$  in der gesamten **Zusammenhangskomponente** von  $z$  in  $U \cap V$  erfüllt (Satz 3.7). Da die Mengen  $N(f, U)$  eine Subbasis der Topologie auf  $\bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  bilden, folgt hiermit, dass  $s_g: V \rightarrow \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  stetig ist.

**Satz 4.1.** *Es sei  $X = \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  der étalé-Raum mit der soeben eingeführten Topologie und  $\pi: X \rightarrow \mathbb{C}$  die bekannte Projektion. Dann gilt:*

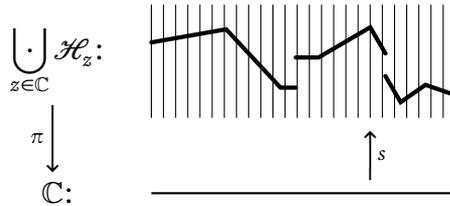
- (1) *Jeder stetige Schnitt  $s: U \rightarrow \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  über offenem  $U \subseteq \mathbb{C}$  kommt von einer holomorphen Funktion, d.h. für jedes solche  $s$  gibt es ein  $f \in \mathcal{H}(U)$  mit  $s = s_f$ .*
- (2) *Die auf  $X$  eingeführte Topologie ist die feinste<sup>3</sup> Topologie derart, dass alle lokalen Schnitte  $s_f: U \rightarrow X$  für alle offenen Mengen  $U \subseteq \mathbb{C}$  und alle holomorphen Funktionen  $f \in \mathcal{H}(U)$  stetig sind.*
- (3)  *$X$  ist ein **Hausdorff-Raum** (d.h. für je zwei verschiedene Punkte  $x_1, x_2 \in X$  gibt es offene Umgebungen  $U_1 \ni x_1$  und  $U_2 \ni x_2$  mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ).*

<sup>3</sup>Eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf einem Raum heißt bekanntlich **feiner** als eine andere Topologie  $\mathcal{T}'$  auf demselben Raum, falls  $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$  gilt, d.h. falls es bezüglich  $\mathcal{T}$  mehr offenen Mengen gibt. Da für Stetigkeit einer Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen gefordert wird, dass das Urbild jeder offenen Menge von  $Y$  offen in  $X$  ist, ist die Stetigkeitsforderung umso **anspruchsvoller**, desto **mehr** offene Mengen in  $Y$  existieren.

- (4)  $\pi$  ist ein **lokaler Homöomorphismus** (d.h. um jeden Punkt  $x \in X$  gibt es eine offene Umgebung  $U \ni x$  derart, dass  $\pi(U)$  offen ist und  $\pi|_U: U \rightarrow \pi(U)$  ein Homöomorphismus ist).

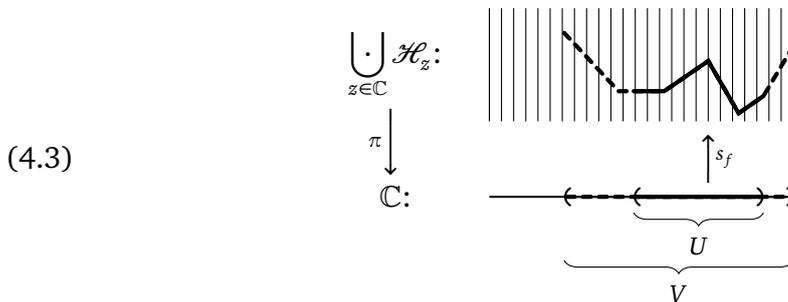
*Beweis.* Die Details seien den Leserinnen und Lesern zur Übung überlassen (Aufgabe 7.3).  $\square$

Die nächste Abbildung illustriert, was man sich als *unstetigen* globalen Schnitt vorstellen könnte:<sup>4</sup>

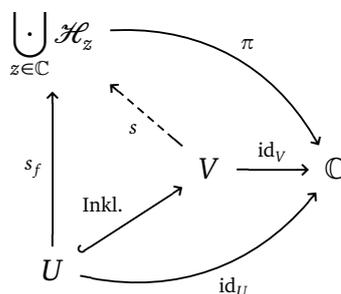


## 4.2. Analytische Fortsetzung (abstrakt)

**4.2.1. In Richtung Riemannsche Flächen.** Wir stellen uns nun dem Problem einen lokalen Schnitt  $s_f$  über  $U$  zu einem lokalen Schnitt über einer größeren offenen Menge  $V \supseteq U$  von  $\mathbb{C}$  fortsetzen zu wollen:



Gemäß (1) ist die Angabe einer stetigen Fortsetzung  $s: V \rightarrow \mathbb{C}$  des Schnittes  $s_f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ,



<sup>4</sup>Erneut sei darauf hingewiesen, dass derartige Bilder nicht *zu ernst* genommen werden dürfen.

(kommutiert), äquivalent dazu, eine stetige Fortsetzung  $g$  von  $f$  zu geben:

$$(4.4) \quad \begin{array}{ccc} V & & \\ \text{Inkl.} \uparrow & \searrow g & \\ U & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}. \end{array}$$

(In dieser Situation gilt dann  $s = s_g$  für den Schnitt  $s$  von oben.)

Sei nun  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Für einen fixierten Keim  $\tilde{z}_0 = [(f, U)]_{z_0} \in \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  betrachten wir nun dessen Zusammenhangskomponente  $\mathcal{R}_f$  im étalé-Raum. Man überlegt sich leicht, dass diese unabhängig von der Wahl von  $z_0 \in U$  ist und sogar wegzusammenhängend ist (vgl. Aufgabe T1.1). Wir haben dann das folgende kommutative Diagramm:

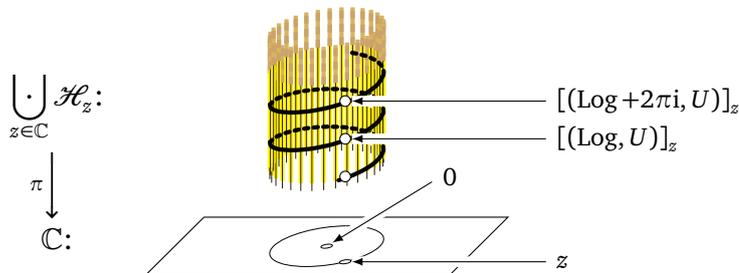
$$(4.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{R}_f & & \\ s_f \uparrow & \searrow [(f_1, U_1)]_{z_1} \mapsto f_1(z_1) & \\ U & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}. \end{array}$$

Hierbei ärgert einen vielleicht, dass  $\mathcal{R}_f$  selbst keine Teilmenge von  $\mathbb{C}$  ist. Durch Anwendung von  $\pi$  erhält man daraus eine solche:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_f & \xrightarrow{[(f_1, U_1)]_{z_1} \mapsto f_1(z_1)} & \mathbb{C}. \\ \pi|_{\mathcal{R}_f} \searrow & & \\ U & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}. \\ \text{Inkl.} \nearrow & & \end{array}$$

Man würde nun gerne eine Fortsetzung von  $s_f$  (und damit von  $f$ ) erhalten, indem man hierin die Abbildung  $\pi|_{\mathcal{R}_f}$  umkehrt.

Wie wir bereits anhand des Logarithmus gesehen hatten, kann hierbei allerdings das Problem auftreten, dass man zwar um jeden Halm herum fortsetzen kann, aber bei weiterer Fortsetzung Mehrdeutigkeit entsteht:



Die obige Abbildung veranschaulicht abermals, dass es auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  keinen *global* definierten Logarithmus gibt (siehe Korollar 2.5): Der zugehörige Schnitt müsste einem Punkt  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gleichzeitig alle Funktionskeime  $[(\text{Log} + 2\pi ik, U)]_z$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und geeigneter offenen Umgebung  $U$  zuordnen.<sup>5</sup> Man kann diesen Defekt auch so verstehen, dass  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  „zu wenige“ Punkte besitzt, um als Definitionsbereich des Logarithmus fungieren zu können: Über einem  $z$  liegen (bezüglich  $\pi$ ) mehrere Keime, die gleichberechtigten Anspruch darauf haben „Wert“ des Logarithmus an diesem Punkt sein. Bernhard Riemann hatte nun die geniale Idee nicht die Punkte  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  als Definitionsbereich zu betrachten, sondern gleich alle über diesen liegenden Keime in  $\mathcal{R}_f$ . Diesem furchtlosen Schöpfungsdrang entspringt dann unmittelbar die Idee einer *Riemannschen Fläche*, also einer ( $\mathbb{C}$ -)eindimensionalen<sup>6</sup> komplexen Mannigfaltigkeit, die durch die auf die eingeschränkte Abbildung  $\pi$  zu einer Überlagerung von  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  wird. (Ähnliche Aussagen gelten auch für andere holomorphe Funktionen als bloß den Logarithmus.) In Analogie zu (4.4) (vgl. (4.5)) entschließt man sich somit  $\mathcal{R}_f$  als Vergrößerung des Definitionsbereichs von  $f$  und  $[(f_1, U_1)]_{z_1} \mapsto f_1(z_1)$  als die zugehörige Fortsetzung von  $f$  anzusehen.

In dieser Vorlesung sei dies im Wesentlichen auch alles, was zu Riemannschen Flächen gesagt werden soll und uns soll die vage Einsicht genügen, dass das *globale* Verständnis mancher interessanter Funktion so in natürlicher Weise aus der Topologie von  $\mathbb{C}$  hinaus auf kompliziertere Objekte führt. Wir beschäftigen uns im Folgenden damit, wie weit wir unser Fortsetzungsproblem lösen können, *ohne* das Flachland der komplexen Zahlen verlassen zu müssen.

**4.2.2. Fortsetzung entlang eines Weges.** Wir umgehen die oben diskutierte Problematik zur fehlenden Injektivität von  $\pi|_{\mathcal{R}_f}$  nun auf eine andere Weise. Hierfür entschließen wir uns grundlegend bescheidener zu sein und wollen ein gegebenes  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$  nunmehr bloß noch auf ein größeres Gebiet  $X \supseteq U$  fortsetzen. Dabei denken wir uns  $X$  ggf. zwar als „deutlich größer“ als  $U$ , aber nicht mehr als das „größtmögliche“ Gebiet, auf dem  $f$  eigentlich „leben möchte“. (Letzteres wäre ja, wie oben diskutiert, eher eine Riemannsche Fläche und im Ganzen nicht unbedingt eine Teilmenge von  $\mathbb{C}$ .)

Es sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg mit  $\gamma(0) = z_0$  und  $\gamma(1) = z_1$ . Wir sagen  $\tilde{z}_1 = [(f_1, U_1)]_{z_1}$  entstehe aus  $\tilde{z}_0 = [(f, U)]_{z_0}$  durch **analytische Fortsetzung entlang  $\gamma$** , falls es eine **Hochhebung  $\tilde{\gamma}$  von  $\gamma$  bezüglich  $\pi$**  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{z}_0$  und  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{z}_1$  gibt. Unter einer derartigen *Hochhebung* verstehen wir einen Weg  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$ ,

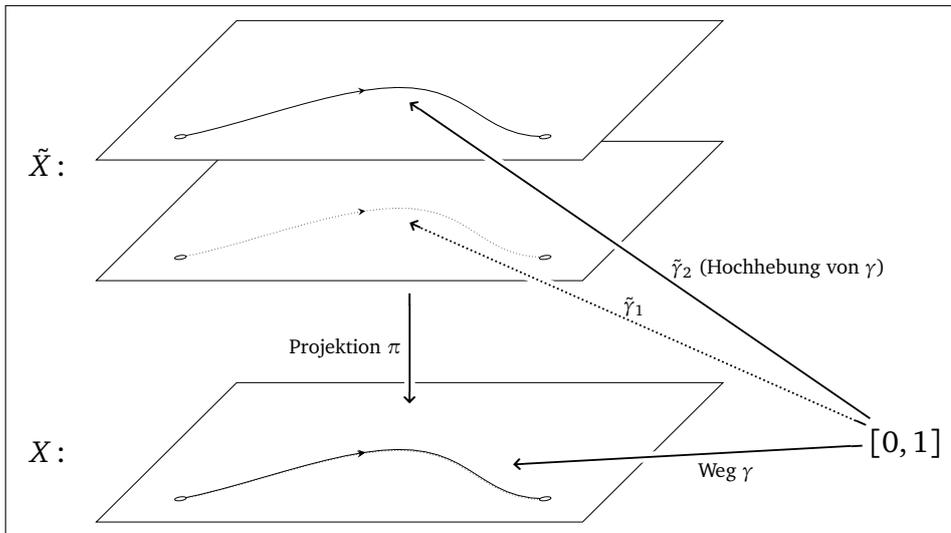
<sup>5</sup>Ganz korrekt sollte man hier wegen des Definitionsbereichs von  $\text{Log}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  den Fall  $z \in \mathbb{R}_{< 0}$  gesondert behandeln, aber zur Vereinfachung der Sprache sei darauf nur in dieser Fußnote eingegangen.

<sup>6</sup>Wegen  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  (als  $\mathbb{R}$ -Vektorräume) sieht das ganze im Reellen aber zweidimensional aus. — Darum der Begriff „Fläche.“

der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc}
 & \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z & \\
 \tilde{\gamma} \nearrow & & \downarrow \pi \\
 [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{C}.
 \end{array}$$

Bei der Betrachtung von Hochhebungen haben wir in der Regel ein Bild wie in Abbildung 22 im Kopf.



**Abbildung 22.** Illustration zur Hochhebung eines Weges  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  bezüglich einer Projektion  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ . Achtung: das hierdurch gestiftete Diagramm ist nicht kommutativ, da  $\tilde{\gamma}_1$  und  $\tilde{\gamma}_2$  nicht übereinstimmen, wird aber kommutativ, sobald man einen der beiden Wege  $\tilde{\gamma}_k$  entfernt.

Wir wollen im Folgenden nun zu fixiertem  $\tilde{z}_0 = [(f, U)]_{z_0} \in \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  nur die Teilmenge  $\tilde{X}$  von Punkten von  $\mathcal{R}_f$  betrachten, welche sich durch analytische Fortsetzung aus  $[(f, U)]_{z_0}$  entlang von Wegen  $\gamma$  erhalten lassen, wobei wir die zusätzliche Forderung treffen wollen, nur Wege  $\gamma$  zuzulassen, deren Spur ganz in  $X \supseteq U$  verläuft ( $X \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet). Man kann sich überlegen, dass diese Menge  $\tilde{X}$  stets offen ist, sofern  $X \subseteq \mathbb{C}$  offen ist. (Vgl. Aufgabe 8.4 (a), wo dies für einen Spezialfall formuliert ist; der dort in der Lösung gegebene Beweis ist allerdings allgemeingültig.) Wir haben nun das folgende Programm vor Augen:

- (1) Untersuche Bedingungen an  $X$ , unter denen man sicherstellen kann, dass analytische Fortsetzung von  $\tilde{z}_0$  entlang von Wegen mit Spur in  $X$  — sofern Sie denn überhaupt durchführbar ist — nur von den Endpunkten von  $\gamma$  abhängt.

In dieser Situation kann man dann für jedes  $z_1 \in X$  durch  $g(z_1) := f_1(z_1)$  eine Fortsetzung von  $f$  auf  $X$  definieren. Hier entstehe  $[(f_1, U_1)]_{z_1}$  durch analytische Fortsetzung von  $\tilde{z}_0$  entlang eines beliebigen Weges mit Spur in  $X$ , der  $z_0$  mit  $z_1$  verbindet. Man kann sich dann überlegen, dass  $g(z_2) = f_1(z_2)$  für alle  $z_2 \in U_1$  gilt und das so erhaltene  $g$  tatsächlich (wie gewünscht) holomorph ist. (Vgl. das Argument aus dem Beweis von Aufgabe 7.3 (a).)

- (2) Gebe Kriterien dafür an, wann analytische Fortsetzung in der Form, wie sie für die Durchführung des ersten Programmpunktes benötigt wird, möglich ist.

Wir widmen uns im Folgenden zunächst dem ersten Programmpunkt und untersuchen den zweiten Punkt dann getrennt. Die Abschnitte § 4.3 und § 4.4 sind hierbei dem ersten Programmpunkt gewidmet, während wir in § 4.5 den Zweiten behandeln. In § 4.6 besprechen wir Anwendungen der entwickelten Theorie.

### 4.3. Hochheben von Wegen

**Bemerkung.** In diesem Abschnitt fehlen diverse Bilder, deren Abwesenheit die Beweise sehr trocken wirken lässt. Man beachte darum insbesondere die Vorlesungsaufzeichnungen und die darin an die Tafel gemalten Abbildungen.

Wie schon im vorherigen Abschnitt angekündigt, wollen wir nun den komplizierten étalé-Raum studieren, indem wir diesen durch das Hochheben von Wegen aus der besser verstandenen komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  untersuchen. Dies entspricht gewissermaßen einem „Abtasten“ des étalé-Raumes mittels „1-dimensionaler Proben“. Wohin diese Proben zu reichen vermögen ist eine Frage, die wir, wie schon erwähnt, bis § 4.5 zurückstellen. Unser erstes Ergebnis ist, dass der Weg in  $\mathbb{C}$  zusammen mit einem Startpunkt für unseren „Taster“ bereits dessen Pfad eindeutig festlegt:

**Lemma 4.2** (Eindeutigkeit von Hochhebungen). *Es sei  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  ein lokaler Homöomorphismus zwischen Hausdorffräumen  $\tilde{X}$  und  $X$ .  $Y$  sei ein zusammenhängender topologischer Raum und  $\gamma: Y \rightarrow X$  sei stetig. Ferner seien  $\tilde{\gamma}_1$  und  $\tilde{\gamma}_2$  zwei Hochhebungen von  $\gamma$ , d.h. beide Diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{\gamma}_k & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{\gamma} & X, \end{array} \quad (k = 1, 2)$$

*mögen kommutieren.<sup>7</sup> Falls dann außerdem  $\tilde{\gamma}_1$  und  $\tilde{\gamma}_2$  an irgendeinem Punkt  $y_0 \in Y$  übereinstimmen, so gilt überhaupt schon  $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ .*

**Beweis.** Wir betrachten die Übereinstimmungsmenge

$$\mathcal{E} = \{y \in Y : \tilde{\gamma}_1(y) = \tilde{\gamma}_2(y)\} \subseteq Y.$$

<sup>7</sup>Natürlich sollen  $\tilde{\gamma}_1$  und  $\tilde{\gamma}_2$  auch stetig sein. Derartige offensichtliche Annahmen werden im Folgenden oft stillschweigend angenommen.

Nach Voraussetzung ist  $\mathcal{E} \ni y_0$  nicht leer. Wir zeigen im Folgenden, dass  $\mathcal{E}$  abgeschlossen und offen ist. Da  $Y$  zusammenhängend ist, muss dann  $\mathcal{E} = Y$  gelten und wir sind fertig.

Zur *Abgeschlossenheit* von  $\mathcal{E}$ : Wir behaupten, dass

$$\mathcal{E} = (\tilde{\gamma}_1 \times \tilde{\gamma}_2)^{-1}(\Delta)$$

als Urbild der abgeschlossenen Menge  $\Delta = \{(\tilde{x}, \tilde{x}) : \tilde{x} \in \tilde{X}\} \subseteq \tilde{X} \times \tilde{X}$  unter der stetigen Abbildung  $\tilde{\gamma}_1 \times \tilde{\gamma}_2: Y \rightarrow \tilde{X} \times \tilde{X}$ ,  $y \mapsto (\tilde{\gamma}_1(y), \tilde{\gamma}_2(y))$ , selbst abgeschlossen ist. Hierbei steht wohl höchstens die Abgeschlossenheit von  $\Delta$  in Frage. (Siehe Abbildung 23.) Diese folgt aber daraus, dass  $\tilde{X}$  ein Hausdorffraum ist. Ist nämlich  $\Delta \neq X$ , so gibt es ja zu jedem Punkt<sup>8</sup>  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \tilde{X} \times \tilde{X} \setminus \Delta$  Umgebungen offene  $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subseteq \tilde{X}$  von  $\tilde{x}_1$  respektive  $\tilde{x}_2$  mit  $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$ . Dann ist aber  $\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2$  eine offene Umgebung von  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ , welche  $\Delta$  nicht schneidet (denn ein solcher Schnittpunkt würde ein Gegenbeispiel zur Disjunktheit von  $\tilde{U}_1$  und  $\tilde{U}_2$  liefern). Also ist  $X \setminus \Delta$  offen und  $\Delta$  daher abgeschlossen.<sup>9</sup>

Zur *Offenheit* von  $\mathcal{E}$ : Sei  $y \in \mathcal{E}$  beliebig. Wir schreiben  $\tilde{x} := \tilde{\gamma}_1(y)$  (was nach Wahl von  $y$  auch gleich  $\tilde{\gamma}_2(y)$  ist). Wir wählen  $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$  als offene Umgebung von  $\tilde{x}$  mit  $\pi(\tilde{U}) \subseteq X$  offen derart, dass  $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow \pi(\tilde{U})$  ein Homöomorphismus ist. (Dies ist möglich, da  $\pi$  laut Voraussetzung ein lokaler Homöomorphismus ist.) Da  $\tilde{\gamma}_k$  ( $k = 1, 2$ ) stetig ist, gibt es eine offene Umgebung  $V \subseteq Y$  um  $y$  mit  $\tilde{\gamma}_k(V) \subseteq \tilde{U}$  (für beide  $k$  gleichzeitig). Nun gilt allerdings

$$\pi|_{\tilde{U}} \circ \tilde{\gamma}_1|_V = \gamma|_V = \pi|_{\tilde{U}} \circ \tilde{\gamma}_2|_V.$$

Weil  $\pi|_{\tilde{U}}$  injektiv ist, folgt hieraus  $\tilde{\gamma}_1|_V = \tilde{\gamma}_2|_V$  und also  $V \subseteq \mathcal{E}$ . Also ist  $\mathcal{E}$  offen.  $\square$

Wir wollen nun studieren, wie sich Hochhebungen unter stetigem Wechsel der hochgehobenen Wege verhalten. Hierzu brauchen wir erneut ein wenig Sprechweise. Eine stetige Abbildung  $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$  in einen topologischen Raum soll **freie Homotopie** von Wegen heißen (siehe Abbildung 24). Wir schreiben dann oft  $\gamma_s := (t \mapsto H(t, s))$  für die zugehörigen Wege an der Stelle  $s \in [0, 1]$ . Ohne den Zusatz „frei“ fordern wir noch zusätzlich Folgendes:

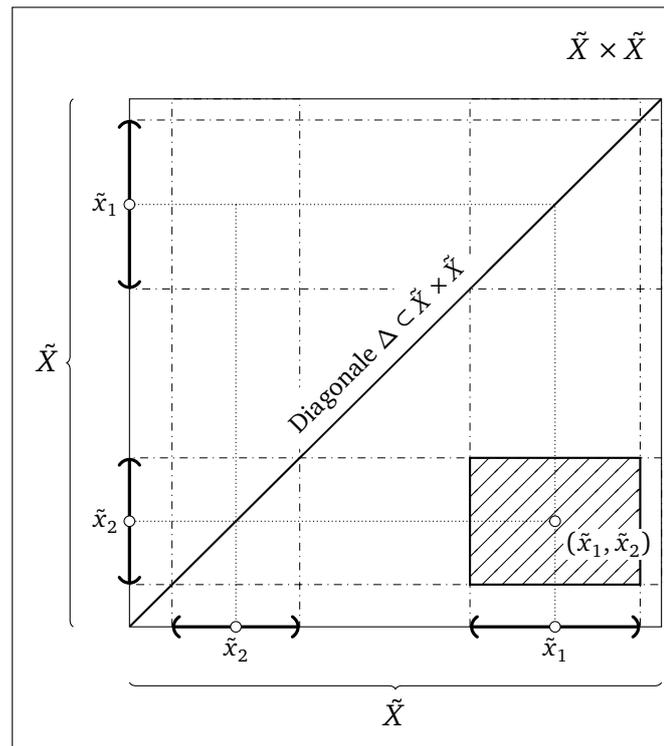
- $s \mapsto H(a, s)$  ist konstant,
- $s \mapsto H(b, s)$  ist konstant.

(D.h. die Endpunkte der Wege  $\gamma_s$  werden von  $H$  fixiert.)

**Bemerkung.** Der hier eingeführte Homotopie-Begriff ist keineswegs der Allgemeinste, der in der Topologie auftritt. Für unsere Zwecke genügt allerdings diese bodenständige Variante, die man im allgemeineren Kontext oft auch als „relative Homotopie“ bezeichnet.

<sup>8</sup>Falls es überhaupt gar keinen solchen Punkt gibt, also  $\Delta$  mit  $\tilde{X} \times \tilde{X}$  übereinstimmt, so ist  $\Delta$  selbstverständlich schon trivialerweise abgeschlossen (und sogar auch offen).

<sup>9</sup>Tatsächlich liefert die Abgeschlossenheit der *Diagonale*  $\Delta$  eine Charakterisierung der Hausdorffei-genschaft: Ein topologischer Raum  $\tilde{X}$  ist genau dann ein Hausdorffraum wenn  $\{(\tilde{x}, \tilde{x}) : \tilde{x} \in \tilde{X}\} \subseteq \tilde{X} \times \tilde{X}$  abgeschlossen ist.



**Abbildung 23.** Illustration zum Beweis, dass für einen Hausdorffraum  $\tilde{X}$  die Diagonale  $\Delta \subseteq \tilde{X} \times \tilde{X}$  stets abgeschlossen ist. Man zeigt hierzu, dass ihr Komplement in  $\tilde{X} \times \tilde{X}$  offen ist. Zu jedem Punkt  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \notin \Delta$  findet man nämlich trennende Umgebungen von  $\tilde{x}_1$  und  $\tilde{x}_2$  in  $\tilde{X}$  und deren kartesisches Produkt ist dann eine offene Umgebung von  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  in  $\tilde{X} \times \tilde{X}$ , welche die Diagonale nicht schneidet.

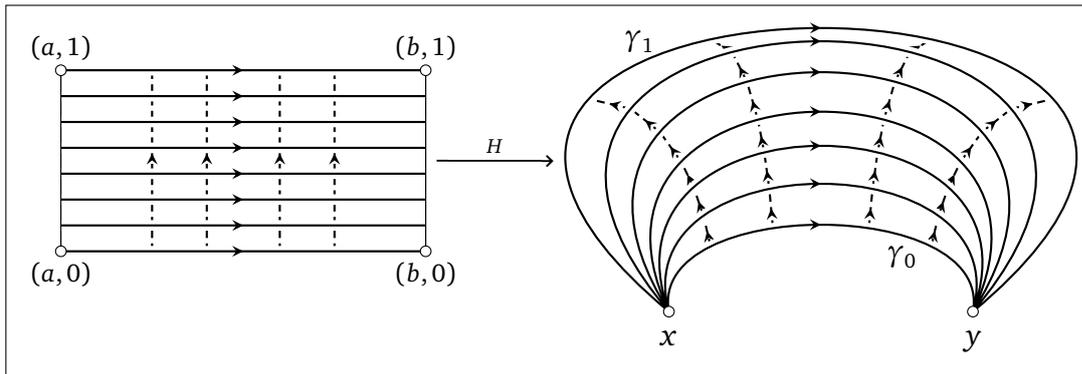
In der obigen Notation sagen wir auch  $H$  sei eine **Homotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$** . Umgekehrt betrachtet, beginnend mit zwei Wegen  $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow X$ , nennt man diese **homotop (in  $X$ )**, falls es eine Homotopie  $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$  zwischen diesen gibt. Man überlegt sich leicht, dass Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege  $[a, b] \rightarrow X$  stiftet.

**Beispiel.** Der Kreisweg  $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \exp(2\pi it)$  ist in  $\mathbb{C}$  homotop zum konstanten Weg  $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \{1\}$ ; Eine geeignete Homotopie  $H$  ist beispielsweise durch

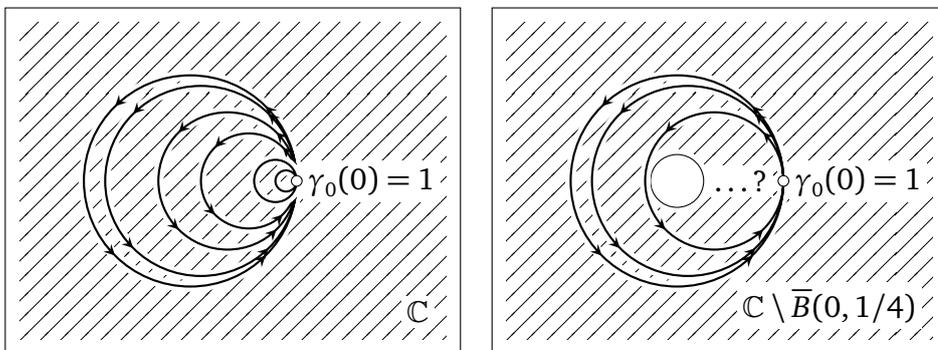
$$(4.6) \quad H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad (t, s) \mapsto (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_0(0)$$

gegeben;<sup>10</sup> siehe Abbildung 25 (a).

<sup>10</sup>Aufmerksame Leserinnen und Leser erkennen hier natürlich eine Konvexkombination von  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$ , welche sich wegen der Konvexität von  $\mathbb{C}$  anbietet.



**Abbildung 24.** Zeichnung einer Homotopie. Man beachte, dass die Endpunkte hier fixiert werden. Bei einer *freien* Homotopie stellen wir diese Forderung nicht.



(a) In  $\mathbb{C}$  ist jeder geschlossene Weg homotop zu einem konstanten Weg. (b) In  $\mathbb{C} \setminus \bar{B}(0, 1/4)$  scheint dies nicht der Fall zu sein.

**Abbildung 25.** Illustration zum Begriff des einfachen Zusammenhangs.

**Bemerkung.** Bei den Wegen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  aus dem vorherigen Beispiel ist hingegen nicht klar, ob diese in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  oder gar  $\mathbb{C} \setminus \bar{B}(0, 1/4)$  homotop sind; siehe Abbildung 25 (b). Tatsächlich sind jene beiden Wege in dieser Situation nicht homotop; Dass dies in der Tat so ist, werden wir noch später sehen (Korollar 4.14).

Ein wegzusammenhängender topologischer Raum  $X$  heißt **einfach zusammenhängend**, falls in diesem jeder geschlossene Weg  $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow X$  homotop zum konstanten Weg  $[0, 1] \mapsto \{\gamma_0(0)\}$  ist. Solche Wege nennt man auch **nullhomotop**. (Diese Sprechweise klärt sich noch, wenn wir von der *Fundamentalgruppe* von  $X$  sprechen werden.)

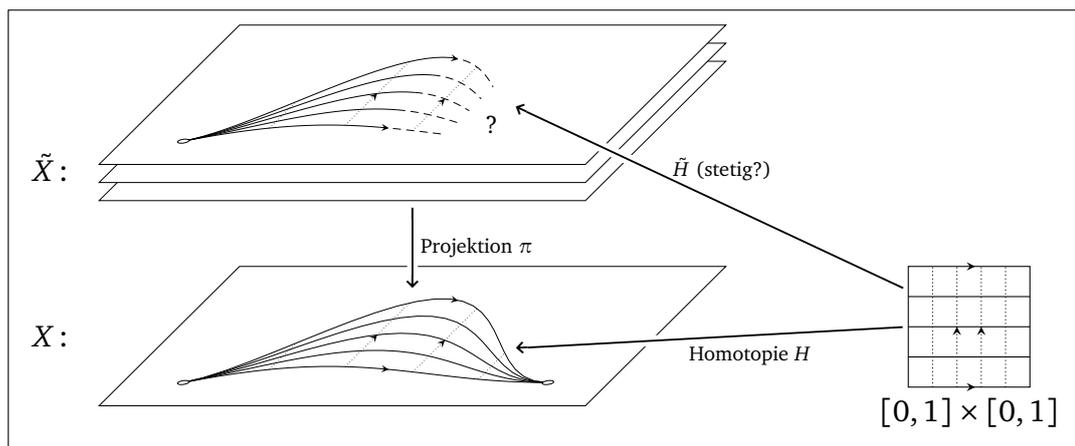
**Bemerkung.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und konvex. Dann ist  $U$  einfach zusammenhängend, wie man mittels der Homotopie aus (4.6) einsehen kann. Allgemeiner kann man auch

leicht sehen, dass jede sternförmige offene Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  einfach zusammenhängend ist. (Man baue zu gegebenem geschlossenen Weg  $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow U$  eine Homotopie  $H$ , welche zunächst am Anfang und Ende von  $\gamma$  einen geradlinigen Weg bis zu einem Sternpunkt wachsen lässt [bei wachsendem Parameter  $s$ , welcher die Schar von Wegen  $\gamma_s$  parametrisiert], dann den ursprünglichen Teil von  $\gamma_0$  auf den gewählten Sternpunkt zusammenzieht [vgl. (4.6)] und anschließend den übriggebliebenen Verbindungsweg zum Sternpunkt wieder einzieht. Für die Untermalung dieser Überlegung durch Skizzen sei auf die Vorlesungsaufzeichnung verwiesen.)

Nun untersuchen wir, wie es sich mit der *Hochhebung von Homotopien* verhält.

**Proposition 4.3** (Hochhebung von Homotopien). *Sei  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  ein lokaler Homöomorphismus zwischen Hausdorffräumen. Es seien  $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$  zwei Wege und  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  eine freie Homotopie zwischen diesen. Ferner sei angenommen, dass sich jeder Weg  $\gamma_s = (t \mapsto H(t, s))$  zu einem Weg  $\tilde{\gamma}_s: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  hochheben lässt.*

- (1) *Falls  $s \mapsto \tilde{\gamma}_s(0)$  stetig ist, so ist bereits  $\tilde{H}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ ,  $(t, s) \mapsto \tilde{\gamma}_s(t)$  stetig, also eine freie Homotopie.*
- (2) *Sei  $H$  nun eine Homotopie<sup>11</sup> und  $s \mapsto \tilde{\gamma}_s(0)$  sei konstant. Dann ist auch  $s \mapsto \tilde{\gamma}_s(1)$  konstant, d.h. bei  $\tilde{H}$  handelt es sich auch um eine Homotopie.*



**Abbildung 26.** Illustration zur Hochhebung von (freien) Homotopien wie in Proposition 4.3.

*Beweis.* Die Fragestellung der Proposition wird in Abbildung 26 verdeutlicht.

Wir beweisen zunächst (2) unter Annahme von (1) und kümmern uns im Anschluss um den Beweis von (1). Da  $s \mapsto \tilde{\gamma}_s(0)$  nach Voraussetzung konstant ist, handelt es sich hierbei insbesondere um eine stetige Abbildung und wir können (1) anwenden. Also ist auch  $s \mapsto \tilde{\gamma}_s(1)$  stetig. Hierbei handelt es sich aber um eine Hochhebung

<sup>11</sup>Es sei daran erinnert, dass dies bedeutet, dass  $s \mapsto \gamma_s(0)$  und  $s \mapsto \gamma_s(1)$  jeweils konstant sein sollen.

der konstanten Abbildung  $s \mapsto \gamma_s(1)$ . Eine weitere solche Hochhebung ist natürlich durch die konstante Abbildung  $s \mapsto \tilde{\gamma}_0(1)$  gegeben und diese stimmt mit der zuvor genannten Hochhebung bei  $s = 0$  überein. Lemma 4.2 liefert nun, dass  $s \mapsto \tilde{\gamma}_s(1)$  konstant ist.

Nun zum Beweis von (1). Wir fixieren  $s_0 \in [0, 1]$  und wollen einsehen, dass  $\tilde{H}$  eingeschränkt auf einen Schlauch  $[0, 1] \times S$  mit

$$(4.7) \quad S := [0, 1] \cap (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$$

stetig ist, wobei  $\delta > 0$  später noch gleich gewählt wird. (Das reicht offensichtlich zum Beweis der Behauptung.)

Mittels Stetigkeit von  $\tilde{\gamma}_{s_0}$ , Kompaktheit von  $[0, 1]$  und der Tatsache, dass  $\pi$  ein lokaler Homöomorphismus ist, findet man eine Zerlegung

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$$

von  $[0, 1]$  und offene Mengen  $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_N \subseteq \tilde{X}$  mit folgenden Eigenschaften (für  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ):

- $U_n := \pi(\tilde{U}_n)$  ist offen in  $X$ ,
- $\pi_n := \pi|_{\tilde{U}_n}: \tilde{U}_n \rightarrow U_n$  ist ein Homöomorphismus,
- $\tilde{\gamma}_{s_0}([t_n, t_{n+1}]) \subseteq \tilde{U}_n$ .

Wir geben nun einige Details zu dieser Konstruktion. Zu jedem Punkt  $t \in [0, 1]$  wähle, da  $\pi$  ein lokaler Homöomorphismus ist, eine offene Umgebung  $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ , die von  $\pi$  homöomorph auf  $\pi(\tilde{U})$  abgebildet wird. Nun ist  $\tilde{\gamma}_{s_0}^{-1}(\tilde{U})$  eine offene Umgebung von  $t$  und enthält also ein Intervall um  $t$  mit nichtverschwindender Länge. Die zugehörigen offenen Intervalle überdecken  $[0, 1]$  und vermöge Kompaktheit kann man eine endliche Teilüberdeckung aussondern. Die zugehörigen endlich vielen  $t$ 's wähle man dann als  $t_0, \dots, t_N$ . Indem man die Intervalle mit denen man überdeckt von vorneherein etwas verkleinert, kann man auch einrichten, dass  $\tilde{\gamma}_{s_0}$  sogar noch eine größere offene Umgebung dieser Intervalle nach  $\tilde{U}$  abbildet; Dieser kleine Kunstgriff ist weiter unten nützlich, um sagen zu dürfen, dass (4.8) sogar noch auf einer geringfügig größeren Menge gilt, sodass wir keine Stetigkeitsfragen an Endpunkten offen lassen.

Wir wollen nun zeigen, dass unsere Homöomorphismen nicht bloß  $\gamma_{s_0}$  zu  $\tilde{\gamma}_{s_0}$  hochheben, sondern dies auch für  $\gamma_s$  und  $\tilde{\gamma}_s$  tun, wenn  $s_0$  nahe bei  $s$  liegt (vgl. (4.8) weiter unten). Ein wichtiges Element unserer Argumente wird es sein, die bereits bekannte Stetigkeit von  $H$  zusammen mit geschickter Anwendung von Lemma 4.2 „nach oben“ zu Stetigkeitsinformation über  $\tilde{H}$  zu transportieren. Wir schaffen uns dazu zunächst auf der Ebene von  $X$  etwas Manoevrierraum. Da  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  stetig ist und  $[t_n, t_{n+1}]$  kompakt ist, gibt es nun ein  $\delta > 0$  mit

$$\gamma_s(t) = H(t, s) \in U_n$$

für alle  $n = 0, 1, \dots, N-1$  und alle  $(t, s) \in [t_n, t_{s+1}] \times S$ , mit  $S$  wie in (4.7). Wir zeigen nun induktiv für  $n = 0, 1, \dots, N-1$  folgende Aussage:

$$(4.8) \quad \tilde{\gamma}_s(t) = (\pi_n^{-1} \circ \gamma_s)(t) \quad (\text{also } \tilde{H}(t, s) = \pi_n^{-1}(H(t, s)))$$

für alle  $(t, s) \in [t_n, t_{n+1}] \cap S$ . Der Beweis zeigt sogar noch mehr, nämlich, dass man hier  $t_{n+1}$  im Falle  $t_{n+1} < 1$  jeweils noch etwas vergrößern kann, womit die Stetigkeit an den Endpunkten ebenfalls unproblematisch ist. Daraus ergibt sich dann offenbar die Behauptung.

Für den Induktionsanfang sei  $n = 0$ . Fixiere  $s \in S$ . Beide Wege  $\tilde{\gamma}_s|_{[t_0, t_1]}$  und  $\pi_0^{-1} \circ \gamma_s|_{[t_0, t_1]}$  sind Hochhebungen von  $\gamma_s|_{[t_0, t_1]}$  und stimmen für  $t = 0$  ( $= t_0$ ) überein, wie wir gleich noch zeigen werden. Wegen der Eindeutigkeit von Hochhebungen, Lemma 4.2, gilt dann

$$\gamma_s|_{[t_0, t_1]} = \pi_0^{-1} \circ \gamma_s|_{[t_0, t_1]},$$

wie gewünscht. Nun zum Beweis von  $\pi_0^{-1} \circ \gamma_s(0) = \tilde{\gamma}_s(0)$ . Die Gleichung gilt jedenfalls nach Konstruktion von  $\pi_0$ , wenn man  $s$  durch  $s_0$  ersetzt. Nun ist allerdings  $\sigma \mapsto \tilde{\gamma}_\sigma(0)$  nach Voraussetzung stetig und damit eine Hochhebung von  $\sigma \mapsto \gamma_\sigma(0)$ , genau wie  $\sigma \mapsto \pi_0^{-1} \circ \gamma_\sigma(0)$ . Da beide bei  $s_0$  übereinstimmen, tun sie dies gemäß Lemma 4.2 auch bei  $s$ .

Für den Induktionsschritt sei (4.8) bereits für  $n$  ersetzt durch  $n-1$  bewiesen. Für  $s \in S$  sind abermals  $\tilde{\gamma}_s|_{[t_n, t_{n+1}]}$  und  $\pi_n^{-1} \circ \gamma_s|_{[t_n, t_{n+1}]}$  Hochhebungen von  $\gamma_s|_{[t_n, t_{n+1}]}$  und aus Lemma 4.2 folgt sogleich (4.8), sofern wir denn wüssten, dass diese beiden Hochhebungen wenigstens an einem Punkt übereinstimmen. Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich jedenfalls

$$(4.9) \quad \tilde{\gamma}_s(t_n) = \pi_{n-1}^{-1} \circ \gamma_s(t_n)$$

für alle  $s \in S$ . Speziell für  $s = s_0$  erhalten wir hieraus

$$\pi_{n-1}^{-1} \circ \gamma_s(t_n) = \tilde{\gamma}_s(t_n) = \pi_n^{-1} \circ \gamma_s(t_n),$$

da ja  $\tilde{\gamma}_{s_0}(t_n)$  ein Element von  $\tilde{U}_{n-1} \cap \tilde{U}_n$  ist. Nun sind aber  $s \mapsto (\pi_{n-1}^{-1} \circ \gamma_s)(t_n)$  und  $s \mapsto (\pi_n^{-1} \circ \gamma_s)(t_n)$  für  $s \in S$  zwei Hochhebungen von  $s \mapsto \gamma_s(t_n)$  und stimmen bei  $s_0$  überein. Lemma 4.2 liefert

$$(\pi_{n-1}^{-1} \circ \gamma_s)(t_n) = (\pi_n^{-1} \circ \gamma_s)(t_n)$$

für alle  $s \in S$ . Mit (4.9) folgt hieraus (4.8). □

#### 4.4. Monodromiesatz

Der nachfolgende Satz 4.4 und das Korollar 4.5 liefern eine gute Lösung zu unserem Programmpunkt (1) von Seite 73.

**Satz 4.4** (Monodromiesatz, I). *Analytische Fortsetzung ist Homotopie-unabhängig. Präziser: es sei  $X \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $H$  eine Homotopie (in  $X$ ) zwischen zwei Wegen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  mit  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$  und  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$ . Ferner lasse sich  $[(f, U)]_{z_0}$  entlang jeden Weges  $\gamma_s = (t \mapsto H(t, s))$  analytisch fortsetzen. Entsteht dann  $[(f_k, U_k)]_{z_1}$  durch*

analytische Fortsetzung von  $[(f, U)]_{z_0}$  entlang von  $\gamma_k$  ( $k = 0, 1$ ), so gilt  $[(f_0, U_0)]_{z_1} = [(f_1, U_1)]_{z_1}$ .

*Beweis.* Die Voraussetzungen implizieren, dass man Proposition 4.3 (2) anwenden kann. Die so erhaltene hochgehobene Homotopie  $\tilde{H}$  liefert für  $s \mapsto \tilde{H}(1, s)$  also eine konstante Funktion; diese verbindet allerdings  $[(f_0, U_0)]_{z_1}$  (für  $s = 0$ ) und  $[(f_1, U_1)]_{z_1}$  (für  $s = 1$ ). Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 4.5** (Monodromiesatz, II). *Es sei  $X \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ferner lasse sich  $[(f, U)]_{z_0}$  mit  $U \subseteq X$  entlang jeden Weges in  $X$  analytisch fortsetzen. Dann gibt es eine holomorphe Funktion  $g \in \mathcal{H}(X)$  mit  $g|_U = f$ .*

*Beweis.* Es sei  $z_1 \in X$  ein beliebiger Punkt. Da  $X$  wegzusammenhängend ist, kann man  $g(z_1)$ , wie in Punkt (1) auf Seite 73 überlegt, durch  $g(z_1) := f_0(z_1)$  definieren, wo  $[(f_0, U_0)]_{z_1}$  durch analytische Fortsetzung von  $[(f, U)]_{z_0}$  entlang eines beliebigen Weges  $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma_0(0) = z_0$  und  $\gamma_0(1) = z_1$  entsteht. Sofern denn diese Fortsetzung nur von  $[(f, U)]_{z_0}$  und dem Endpunkt  $z_1$  abhängt, entsteht hieraus (wie bereits zuvor angedeutet) auch wirklich eine holomorphe Funktion. Es bleibt also nur die Eindeutigkeit zu klären. Es entstehe darum auch  $[(f_1, U_1)]_{z_1}$  durch analytische Fortsetzung von  $[(f, U)]_{z_0}$  entlang eines zweiten Weges  $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma_1(0) = z_0$  und  $\gamma_1(1) = z_1$ . Dann ist jedoch

$$\gamma: [0, 2] \rightarrow X, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_0(1-t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_1(t-1) & \text{falls } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

ein geschlossener Weg in  $X$ , der sich (durch analoge Verkettung geeigneter Hochhebungen von  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$ ) zu einem Weg  $\tilde{\gamma}$  in  $\bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  hochheben lässt, welcher  $[(f_0, U_0)]_{z_1}$  und  $[(f_1, U_1)]_{z_1}$  verbindet. Da  $X$  einfach zusammenhängend ist, ist  $\gamma$  jedoch nullhomotop. Wendet man nun den Monodromiesatz (in der Formulierung von Satz 4.4) an, so sieht man, dass  $[(f_1, U_1)]_{z_1}$  durch analytische Fortsetzung aus  $[(f_0, U_0)]_{z_1}$  entlang  $\gamma$ , aber auch durch analytische Fortsetzung aus  $[(f_0, U_0)]_{z_1}$  entlang des konstanten Weges  $t \mapsto z_1$  entsteht. Aus letzterem Weg entsteht aber nur  $[(f_0, U_0)]_{z_1}$  selbst. Also gilt  $[(f_1, U_1)]_{z_1} = [(f_0, U_0)]_{z_1}$ , wie gewünscht.  $\square$

#### 4.5. Existenz von Hochhebungen

Wir widmen uns nun ganz der Aufgabe ein Kriterium zu entwerfen, wann man die Art von Hochhebungen, die in den Voraussetzungen von Satz 4.4 und Korollar 4.5 auftritt, stets gewährleisten kann.

Eine Abbildung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  zwischen Hausdorffräumen<sup>12</sup> heißt **Überlagerung**, falls es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  gibt derart, dass  $\pi^{-1}$  sich schreiben lässt als disjunkte Vereinigung offener Mengen  $\tilde{U}_j \subseteq \tilde{X}$  (mit  $j$  aus einer geeigneten Indexmenge, die von  $x$  abhängen darf) und jede Menge  $\tilde{U}_j$  von  $\pi|_{\tilde{U}_j}: \tilde{U}_j \rightarrow U$  homöomorph auf

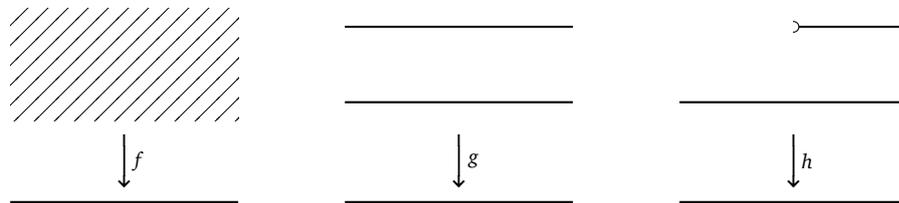
<sup>12</sup>Wie so häufig ist der hier eingeführte Begriff auch in deutlich allgemeinerem Kontext in Gebrauch. Uns reicht hier aber die Einschränkung auf Hausdorffräume.

eine offene Menge  $U = \pi(\tilde{U}_j) \subseteq X$  abgebildet wird. In diesem Fall nennt man  $U$  auch **gleichmäßig (von  $\pi$ ) überlagert**.

**Bemerkung.** Jede Überlagerung ist offensichtlich auch ein surjektiver lokaler Homöomorphismus. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht (siehe die folgenden Beispiele).

**Beispiele 4.6** (Beispiele für Überlagerungen).

- (1)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, h) \mapsto x$ , ist keine Überlagerung.
- (2)  $g: \mathbb{R} \times \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, h) \mapsto x$ , ist eine Überlagerung.
- (3)  $h: (\mathbb{R} \times \{1\}) \cup (\mathbb{R}_{>0} \times \{2\}) \rightarrow \mathbb{R}, (x, h) \mapsto x$ , ist keine Überlagerung.
- (4)  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist eine Überlagerung (vgl. Abbildung 7 auf Seite 18 in Kapitel 1).
- (5)  $p_k: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^k$ , ist für  $k \in \mathbb{N}$  eine Überlagerung (vgl. Abbildung 14 auf Seite 51 in Kapitel 3).



(Der Beweis der hier gemachten Aussagen ist Aufgabe 9.1.)

**Proposition 4.7** (Existenz von Hochhebungen bei Überlagerungen). *Es sei  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  ein  $\pi$ -Urbild eines Punktes  $x_0 \in X$ . Es sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  ein beliebiger Weg mit  $\gamma(0) = x_0$ . Dann gibt es eine eindeutige Hochhebung  $\tilde{\gamma}$  von  $\gamma$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ :*

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \exists! \tilde{\gamma} & \downarrow \pi \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

*Beweis.* Dass es höchstens eine derartige Hochhebung gibt, folgt sofort aus Lemma 4.2. Es verbleibt daher lediglich die Existenz zu klären. Wir wählen zu jedem Punkt  $\gamma(t) \in X$  eine Umgebung  $U_t$ , die von  $\pi$  gleichmäßig überlagert wird. Deren Urbilder unter  $\gamma$  sind natürlich offen und enthalten darum je ein offenes Intervall um  $t$ . Da  $[0, 1]$  kompakt ist, reichen endlich viele  $t$ , damit  $[0, 1]$  von den so gewählten Intervallen überdeckt wird. Wir finden also eine Zerlegung

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$$

mit  $\gamma([t_n, t_{n+1}]) \subseteq U_{t_n} =: U_n$ . Da jedes  $U_n$  von  $\pi$  gleichmäßig überdeckt wird, ist

$$\pi^{-1}(U_n) = \bigcup_j \tilde{U}_{n,j}$$

mit  $j$  aus einer geeigneten Indexmenge und geeigneten disjunkten, offenen Mengen  $\tilde{U}_{n,j} \subseteq \tilde{X}$ , die jeweils von  $\pi_{n,j} := \pi|_{\tilde{U}_{n,j}} : \tilde{U}_{n,j} \rightarrow U_n$  homöomorph auf  $U_n$  abgebildet werden. Wir konstruieren nun  $\tilde{\gamma}$  induktiv für  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Für  $n = 0$  wählen wir den Index  $j = j_0$  mit  $\tilde{x}_0 \in \tilde{U}_{0,j_0}$ . Dann definieren wir  $\tilde{\gamma}$  auf  $[t_0, t_1]$  durch  $\pi_{0,j_0}^{-1} \circ \gamma|_{[t_0, t_1]}$ .

Ist nun  $\tilde{\gamma}$  bereits auf  $[t_{n-1}, t_n]$  konstruiert, so wähle  $j = j_n$  als den Index mit  $\tilde{\gamma}(t_n) \in \tilde{U}_{n,j_n}$  und verfähre wie oben. Da  $N$  endlich ist, erhalten wir auch wirklich eine Funktion  $\tilde{\gamma}$  auf ganz  $[0, 1]$ , wie gewünscht. Die so erhaltene Abbildung  $\tilde{\gamma}$  ist offensichtlich stetig und sogar eine Hochhebung von  $\gamma$ .  $\square$

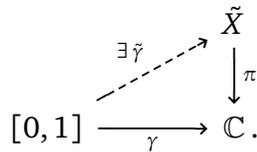
**Bemerkung.** Es könnte instruktiv für das Verständnis der Leserin oder des Lesers sein, sich in der Situation von Beispiel 4.6 (3) zu überlegen, wo der obige Beweis von Proposition 4.7 scheitert, wenn man probiert einen Weg  $\gamma$  in  $\mathbb{R}$  mit  $0 \in \text{tr}(\gamma)$  mittels des dort definierten  $h$  auf  $\mathbb{R}_{>0} \times \{2\}$  hochzuheben.

**Lemma 4.8.**  $d: \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z \rightarrow \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z, [(f, U)]_z \mapsto [(f', U)]_z$ , ist eine Überlagerung.

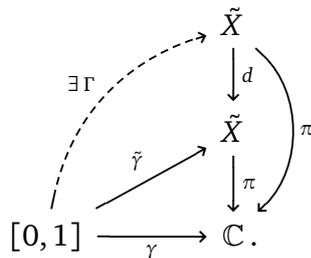
*Beweis.* Siehe Aufgabe 9.3.  $\square$

**Proposition 4.9** (Fortsetzbarkeitskriterium). *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $[(f, U)]_{z_0} \in \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  ein beliebiger Keim und  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg mit  $\gamma(0) = z_0$ . Falls sich  $[(f', U)]_{z_0}$  entlang von  $\gamma$  analytisch fortsetzen lässt, so gilt dies auch für  $[(f, U)]_{z_0}$ .*

*Beweis.* Wir schreiben  $\tilde{X} = \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$ . Nach Voraussetzung an  $[(f', U)]_{z_0}$  lässt sich  $\gamma$  zu einem Weg  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = [(f', U)]_{z_0}$  hochheben:



Da es sich bei  $d: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  um eine Überlagerungsabbildung handelt (Lemma 4.8), lässt sich  $\tilde{\gamma}$  zu einem Weg  $\Gamma$  hochheben:



Wegen  $[(f, U)]_{z_0} \in d^{-1}([(f', U)]_{z_0}) = d^{-1}(\tilde{\gamma}(0))$  lässt sich sogar  $\Gamma(0) = [(f, U)]_{z_0}$  einrichten, wie uns durch Proposition 4.7 sichergestellt wird. Nun ist  $\Gamma$  aber auch eine Hochhebung von  $\gamma$  bezüglich  $\pi \circ d = \pi$  mit Startpunkt  $[(f, U)]_{z_0}$ . Also sind wir fertig.  $\square$

### 4.6. Anwendungen

Im vorliegenden Abschnitt wollen wir einige Anwendungen der in diesem Kapitel entwickelten Fortsetzungstheorie besprechen. Obgleich das intrinsische Interesse an diesen hoffentlich ausreichend evident sein wird, sei erwähnt, dass die hier zu besprechende Erweiterung der Integrationstheorie zusammen mit dem in Kapitel 5 zu besprechenden Ausbau der Cauchyschen Integralformel starke Verbindungen zur Topologie eröffnet. Ferner werden sich die hier zu besprechenden Fortsetzungsfragen für Wurzeln und Logarithmen noch in Kapitel 7 beim Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes (siehe Lemma 7.3) und in Kapitel 8 im Themenkreis des Weierstraßschen Produktsatzes (siehe auch Korollar 8.14) als nützlich erweisen.

**4.6.1. Holomorphe Wurzeln und Logarithmen.** Wir geben im Folgenden zwei typische Beispiele dafür, wie man den Monodromiesatz (Korollar 4.5) in Kombination mit Proposition 4.9 zur Konstruktion holomorpher Fortsetzungen verwenden kann.

**Proposition 4.10** (Existenz holomorpher Logarithmen). *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet welches nicht den Punkt 0 enthält. Dann gibt es eine holomorphe Funktion  $L: U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\exp \circ L = \text{id}_U$ :*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow L & \downarrow \exp \\ U & \xrightarrow{\text{id}_U} & \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{array}$$

*Beweis.* Es sei  $z_0 \in U$  beliebig. Wir wählen ein beliebiges  $\exp$ -Urbild  $w_0$  von  $z_0$ :  $\exp(w_0) = z_0$ . (Dies ist möglich, da  $\exp$  surjektiv auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  abbildet und  $z_0$  nach Voraussetzung nicht Null ist.) Dank des Umkehrsatzes (Aufgabe 1.1 (b)) gibt es eine kleine Kreisscheibe  $W = B(w_0, \epsilon)$  derart, dass  $V := \exp(W)$  offen ist und  $\exp|_W: W \rightarrow V$  biholomorph ist. Wir betrachten nun die zugehörige Umkehrfunktion  $\ell := (\exp|_W)^{-1}$ . Die erfüllt (siehe Aufgabe 1.1 (b))

$$\ell'(z) = \frac{1}{\exp'\{(\exp|_W)^{-1}(z)\}} = \frac{1}{z} \quad (\text{für } z \in V).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung ist aber nicht nur für  $z \in V$ , sondern sogar für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  sinnvoll:  $\ell'$  lässt sich zu einer auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorphen Funktion fortsetzen. Dementsprechend liefert Proposition 4.9 nun, dass sich der Keim  $[(\ell, V)]_{z_0}$  entlang *jeden* Weges mit Spur in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , also insbesondere entlang jeden Weges mit Spur in  $U$  analytisch fortsetzen lässt. Der Monodromiesatz (in der Formulierung von Korollar 4.5) liefert dann die Existenz einer holomorphen Funktion  $L: U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $L|_V = \ell$ . Überdies gilt für alle  $z \in V$

$$z = (\exp \circ \ell)(z) = (\exp \circ L)(z).$$

Da  $V$  natürlich einen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$  besitzt liefert der Identitätssatz (Satz 3.7) angewandt auf die holomorphen Funktionen  $\text{id}_U$  und  $\exp \circ L$  sogleich  $\text{id}_U = \exp \circ L$ , wie gewünscht.  $\square$

**Korollar 4.11** (Existenz holomorpher  $k$ -ter Wurzeln). *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet welches nicht den Punkt 0 enthält. Dann gibt es zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  eine holomorphe Funktion  $w_k: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , welche  $w_k(z)^k = z$  für alle  $z \in U$  erfüllt:*

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{C} \setminus \{0\} & \\
 w_k \nearrow & & \downarrow p_k: z \mapsto z^k \\
 U & \xrightarrow{\text{id}_U} & \mathbb{C} \setminus \{0\}.
 \end{array}$$

*Beweis.* Man könnte hier den Beweis von Proposition 4.10 im Wesentlichen 1:1 kopieren, aber noch einfacher geht es, wenn man  $w_k(z) := \exp(L(z)/k)$  mit einer Funktion  $L: U \rightarrow \mathbb{C}$  wie aus Proposition 4.10 setzt. Die Behauptung folgt dann sofort.  $\square$

**4.6.2. Integration entlang allgemeiner Wege.** Im vorliegenden Abschnitt weiten wir den bisher bekannten Integralbegriff auf Integration entlang lediglich als stetig vorausgesetzter Wege aus. Mehr Kommentare hierzu finden sich in Bemerkung 4.15. Der Monodromiesatz (Satz 4.4) liefert weiter unten (Satz 4.13) die schöne Anwendung, dass unser Integralbegriff homotopieinvariant ist.

Es sei nun  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $[(f, U)]_{z_0}$  ein Keim, sowie  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein beliebiger Weg in  $U$ . Dann erhalten wir durch  $s_f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  eine Hochhebung von  $\gamma$  bezüglich der Projektion  $\pi: \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z & & \\
 \tilde{\gamma} \nearrow & & \uparrow s_f & & \searrow \pi \\
 [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{C}}} & \mathbb{C}.
 \end{array}$$

Es sei nun  $F_0: V_0 \rightarrow \mathbb{C}$  eine Stammfunktion von  $f$  auf einer geeigneten Umgebung  $V \subseteq U$  von  $z_0$ ; eine solche existiert dank des Satzes von Cauchy für konvexe Mengen (Satz 2.14) jedenfalls wenn man  $V$  als eine offene Kreisscheibe um  $z_0$  wählt und ist bekanntlich bis auf Addition einer Konstanten sogar wohl-bestimmt. Da wir eben gesehen haben, dass sich  $[(f, U)]_{z_0}$  entlang jedes Weges in  $U$  mit Startpunkt bei  $z_0$  fortsetzen lässt, gilt selbiges laut Proposition 4.9 auch für  $[(F_0, V_0)]_{z_0}$ . Sei  $z_1 = \gamma(b)$  der Endpunkt von  $\gamma$  und  $[(F_1, V_1)]_{z_1}$  entstehe durch Fortsetzung von  $[(F_0, V_0)]_{z_0}$  entlang  $\gamma$ . Laut Lemma 4.2 ist  $[(F_1, V_1)]_{z_1}$  durch  $[(F_0, V_0)]_{z_0}$  und  $\gamma$  eindeutig bestimmt. Wir

setzen<sup>13</sup>

$$\int_{\gamma} [(f, U)]_{z_0} := F_1(z_1) - F_0(z_0).$$

Man überlegt sich leicht, dass diese Definition sogar unabhängig von der Wahl der Stammfunktion von  $f$  in der Umgebung von  $z_0$  ist, denn die etwaige additive Konstante um die sich zwei Stammfunktionen unterscheiden überträgt sich freilich auch auf die Fortsetzung  $[(F_1, V_1)]_{z_1}$  entlang  $\gamma$  und hebt sich schließlich in der obigen Differenzenbildung genau wieder heraus.

**Lemma 4.12** (Verträglichkeit mit dem bekannten Wegintegralbegriff). *Gegeben sei ein Integrationsweg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph auf einer offenen Umgebung  $U \subseteq \mathbb{C}$  von  $\text{tr}(\gamma)$ . Dann gilt*

$$\int_{\gamma} [(f, U)]_{\gamma(a)} = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $[a, b] = [0, 1]$ . Es sei  $[(F_0, V_0)]_{z_0}$  wie oben, also der Keim einer Stammfunktion von  $f$  in einer Umgebung von  $z_0$ , und  $[(F_1, V_1)]_{z_1}$  entstehe aus  $[(F_0, V_0)]_{z_0}$  durch analytische Fortsetzung entlang von  $\gamma$ . Genauer sei  $\tilde{\gamma}$  die zugehörige Hochhebung:

$$\begin{array}{ccc} & & \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z \\ & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow \pi \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{C}, \end{array}$$

( $\tilde{\gamma}(0) = [(F_0, V_0)]_{z_0}$ ,  $\tilde{\gamma}(1) = [(F_1, V_1)]_{z_1}$ ). Für  $t \in [0, 1]$  schreiben wir  $\tilde{\gamma}(t) = [(F_t, V_t)]_{z_t}$  und  $\tilde{\gamma}^{-1}(V_t)$  ist eine (in  $[0, 1]$ ) offene Umgebung von  $t$ . Mittels des nunmehr schon mehrfach ausgeführten Kompaktheitsarguments finden wir daher eine Zerlegung

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$$

von  $[0, 1]$  mit  $\tilde{\gamma}([t_n, t_{n+1}]) \subseteq N(F_{t_n}, V_{t_n})$  für  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Durch Anwenden von  $\pi$  entsteht hieraus  $\gamma([t_n, t_{n+1}]) \subseteq V_{t_n}$ . Mit Proposition 2.3 erhalten wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\gamma|_{[t_n, t_{n+1}]}} f(z) dz = \sum_{n=0}^{N-1} (F_{t_n}(\gamma(t_{n+1})) - F_{t_n}(\gamma(t_n)))$$

Aufgrund von  $\tilde{\gamma}(t_{n+1}) \in N(F_{t_n}, V_{t_n}) \cap N(F_{t_{n+1}}, V_{t_{n+1}})$  folgt, dass  $F_{t_n}$  und  $F_{t_{n+1}}$  auf einer offenen Umgebung von  $\tilde{\gamma}(t_{n+1})$  übereinstimmen. Insbesondere ist  $F_{t_n}(\gamma(t_{n+1})) =$

<sup>13</sup>Diese Notation ist nicht üblich und wird hier nur für den Moment benutzt. Nach Lemma 4.12 wird diese sofort wieder abgeschafft (siehe (4.10)).

$F_{t_{n+1}}(\gamma(t_{n+1}))$ . Bei der obigen Summe handelt es sich also um eine Teleskopsumme und diese berechnet sich als die Differenz der beiden Endterme:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F_{t_N}(\gamma(t_N)) - F_{t_0}(\gamma(t_0)) = F_1(z_1) - F_0(z_0) = \int_{\gamma} [(f, U)]_{\gamma(0)}. \quad \square$$

Das eben bewiesene Lemma erlaubt die folgende Definition: Für eine holomorphe Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  und einen Weg  $\gamma$  definieren wir

$$(4.10) \quad \int_{\gamma} f(z) dz := \int_{\gamma} [(f, U)]_{\gamma(0)}.$$

Lemma 4.12 versichert uns, dass die hier getroffene Definition mit dem bereits bekannten Wegintegral-Begriff übereinstimmt, sofern dieser denn auf die vorliegende Situation anwendbar ist (d.h. wenn  $\gamma$  ein Integrationsweg ist).

Satz 4.4 und unsere neu gefundene Interpretation des Integralbegriffs liefern unmittelbar(!) die Homotopieunabhängigkeit des Wegintegrals:

**Satz 4.13** (Homotopieunabhängigkeit des Wegintegrals).  $U \subseteq \mathbb{C}$  sei offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph.  $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow U$  seien zwei Wege. Falls  $\gamma_0$  in  $U$  homotop zu  $\gamma_1$  ist, so gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Mit diesem neuen Werkzeug ergibt sich auch sofort eine Antwort auf die in der Bemerkung auf Seite 76 aufgeworfene Frage:

**Korollar 4.14.** Weder  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  noch  $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, r)$  (für  $r > 0$ ) sind einfach zusammenhängend.

*Beweis.* Es sei  $U \in \{\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, r)\}$ . (Im ersten Fall setze  $r := 0$ .) Es sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto R \exp(2\pi i t)$ , der bekannte Kreisweg zum Radius  $R := r + 1$ . Dann ist

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Ind}_{\gamma}(0) = 2\pi i \neq 0.$$

Wäre nun  $U$  einfach zusammenhängend, so wäre  $\gamma$  ja homotop zu einem konstanten Weg und das obige Integral müsste wegen Satz 4.13 dann verschwinden.  $\square$

Es sei hier noch erwähnt, dass das obige Korollar *topologische* Eigenschaften von gewissen offenen Teilmengen von  $\mathbb{C}$  beweist und dazu einem komplex-analytischen Blickwinkel folgt. Man vergleiche dies mit Korollar 2.5 und der darauffolgenden Bemerkung (siehe Seite 25).

**Bemerkung 4.15.** Es scheint hervorhebenswert, wie verblüffend es ist, dass die obige Definition funktioniert. Ursprünglich war

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

ja nur mittels der Formel

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

definiert, wenn  $\gamma$  stückweise stetig differenzierbar ist. Nun glückt aber auch die Fassung eines sinnvollen Integralbegriffs, wenn  $\gamma$  gar nirgends(!) differenzierbar sondern bloß stetig ist. (An Beispielen von erschreckend kompliziert anmutenden Wegen mangelt es uns freilich nicht; siehe etwa Abbildung 8 auf Seite 21 in Kapitel 2 oder Abbildung 12 auf Seite 44 in Kapitel 3.) Dass der hier eingeführte Integralbegriff auch wirklich als „sinnvoll“ bezeichnet werden darf, weiß man zwar streng genommen auch erst, wenn man sich davon überzeugt hat, dass die üblichen Rechenregeln erhalten bleiben, aber auf diese langweilige (und einfache!) Pflicht wollen wir hier verzichten. Eifrige Leserinnen und Leser versuchen sich an dieser Stelle vielleicht daran, die Aussage von Aufgabe 2.3 von Integrationswegen auf Wege zu übertragen.

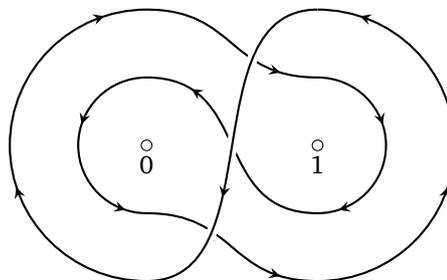
## KAPITEL 5

### Der globale Satz von Cauchy

Ziel dieses Kapitels wird es sein, den Integralsatz von Cauchy (Satz 2.14) und die daraus gewonnene Integralformel (Satz 2.15) noch weiter zu verbessern und entsprechende Anwendungen daraus zu ziehen. Bisher hat uns im Wesentlichen immer der Fall genügt, wenn der betrachtete Integrationsweg ganz in einer konvexen Menge enthalten war, auf welcher die zu integrierende Funktion  $f$  holomorph war. Dadurch, dass offene Mengen in  $\mathbb{C}$  stets lokal konvex sind, ließ sich mittels der Cauchyschen Integralformel dann beispielsweise die lokale Darstellbarkeit holomorpher Funktionen durch konvergente Potenzreihen (Satz 3.2) herleiten. Die raffinierteren Ergebnisse in Kapitel 3 ergaben sich dann im Wesentlichen daraus, dass diese für Polynome und, allgemeiner, Potenzreihen, richtig sind. „Globale“ Aussagen, wie z.B. der Identitätssatz (Satz 3.7), welcher erlaubt, die globale Übereinstimmung zweier holomorpher Funktionen zu folgern, wenn man Übereinstimmung jedenfalls irgendwo lokal hat, hat sich bereits als ein mächtiges Werkzeug erwiesen. (Man denke etwa an unsere Diskussion von analytischer Fortsetzung in Kapitel 4, welche in fundamentaler Weise darauf fußte, dass es sich bei der Projektion  $\pi: \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  um einen lokalen Homöomorphismus handelt. — Eine Konsequenz aus dem Identitätssatz!)

In der obigen Diskussion propagierte sich die aus der Cauchyschen Integralformel gewonnene Information stets vom Lokalen ins Globale. Es erscheint daher wünschenswert, die Integralformel bereits in einer globalen Form zur Verfügung zu haben, die ohne die strenge Konvexitätsforderung an das zugrundegelegte Gebiet auskommt.

**Beispiel** (Pochhammer-Weg). Man betrachte den folgenden Weg  $\gamma$ , den man schon aus Aufgabe 2.4 kennt:



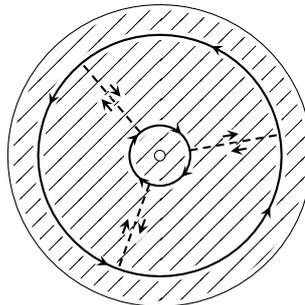
Man kann sich durch Einzeichnung geeigneter Hilfswege (die genauso oft in eine, wie auch die andere Richtung [also Netto gar nicht] durchlaufen werden) überlegen, dass

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jede holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  gilt. Man kann sich auch überlegen, dass  $\gamma$  nicht nullhomotop ist; das Verschwinden des obigen Wegintegrals ist also keine unmittelbare Konsequenz aus der Homotopieinvarianz des Wegintegrals (Satz 4.13) und lässt sich in Ermangelung von Konvexität von  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  auch nicht direkt(!) aus Satz 2.14 gewinnen. (Die Variante aus Aufgabe 4.1 für sternförmige Gebiete lässt sich auch nicht direkt anwenden.)

### 5.1. Der Satz von Cauchy für Zykel

Wir erinnern daran, dass das Wegintegral, welches vormals nur entlang von Integrationswegen definiert war, (für holomorphe Integranden) seit § 4.6.2 auch entlang beliebiger Wege betrachtet werden kann. Wir führen nun noch eine weitere Verallgemeinerung ein, die es einem in der Praxis oft erspart, mit den bereits bekannten entgegengesetzt zu durchlaufenden Hilfswegen zu arbeiten. Man erinnere sich hierzu beispielsweise an die für den Beweis von Satz 3.18 herangezogene Unterteilung:



(Oder die komplizierteren Unterteilungen aus der Bemerkung auf Seite 60.)

Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Es sei  $\mathcal{C}([0, 1], U)$  die Menge aller Wege  $[0, 1] \rightarrow U$ . Wir betrachten die freie abelsche Gruppe

$$\bigoplus_{\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], U)} \mathbb{Z} := \{ \text{Abb. } \Gamma: \mathcal{C}([0, 1], U) \rightarrow \mathbb{Z} : \Gamma(\gamma) = 0 \text{ f.f.a. } \gamma \in \mathcal{C}([0, 1], U) \},$$

wobei „f.f.a.“ für „für fast alle“ (d.h. alle bis auf endlich viele) steht. (Die Verknüpfung dieser Gruppe ist freilich durch  $\Gamma_0 + \Gamma_1 := (\gamma \mapsto \Gamma_0(\gamma) + \Gamma_1(\gamma))$  definiert.) Elemente dieser Gruppe bezeichnen wir als **Ketten (in  $U$ )**. Ist  $\Gamma$  eine Kette in  $U$  derart, dass  $\Gamma(\gamma) \neq 0$  höchstens für geschlossene Wege  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  gilt, so nennen wir  $\Gamma$  einen **Zykel (in  $U$ )**.

Für jede Kette  $\Gamma$  in  $U$  und holomorphes  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  sei dann

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \sum_{\gamma \in \mathcal{C}([0,1],U)} \Gamma(\gamma) \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Man beachte, dass in der obigen Summation höchstens endlich viele  $\gamma$  mit  $\Gamma(\gamma) \neq 0$  vorkommen und wir uns darum keine Fragen bezüglich Konvergenz zu stellen haben.

Zur bequemeren Schreibweise identifizieren wir jeden Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  mit der Abbildung

$$\mathcal{C}([0, 1], U) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \gamma_* \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \gamma_* = \gamma, \\ 0 & \text{falls } \gamma_* \neq \gamma. \end{cases}$$

Dann schreibt sich jede Kette  $\Gamma$  als  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination

$$\Gamma = \lambda_1 \gamma_1 + \dots + \lambda_n \gamma_n$$

mit  $n \in \mathbb{N}_0$ , ganzen Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$  und Wegen  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathcal{C}([0, 1], U)$ . (Die leere Summe [ $n = 0$ ] soll hier konventionsgemäß die Nullabbildung  $\mathcal{C}([0, 1], U) \rightarrow \{0\}$  liefern.) Falls man obendrein fordert, dass alle Skalare  $\lambda_1$  bis  $\lambda_n$  von Null verschieden sind, so ist die obige Darstellung auch bis auf Unnummerierung der beteiligten Summanden eindeutig. In dieser Situation schreiben wir  $\text{tr}(\Gamma) = \text{tr}(\gamma_1) \cup \dots \cup \text{tr}(\gamma_n)$  für die **Spur von  $\Gamma$** .

Für einen Zykel  $\Gamma = \lambda_1 \gamma_1 + \dots + \lambda_n \gamma_n$  und  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{tr}(\Gamma)$  definieren wir dessen **Windungszahl um  $z_0$**  durch die Formel

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \lambda_1 \text{Ind}_{\gamma_1}(z_0) + \dots + \lambda_n \text{Ind}_{\gamma_n}(z_0).$$

Wir sagen,  $\Gamma$  **umläuft**  $z_0$ , falls  $\text{Ind}_{\gamma_n}(z_0) \neq 0$  ist. Wir nennen zwei Zykel  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  (beide in  $U$ ) **homolog (in  $U$ )**, falls

$$\text{Ind}_{\Gamma_0}(z) = \text{Ind}_{\Gamma_1}(z)$$

für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus U$  gilt. Ein Zykel  $\Gamma$  in  $U$ , welcher in  $U$  homolog zum Nullzykel  $\mathcal{C}([0, 1], U) \rightarrow \{0\}$  ist, heißt auch **nullhomolog (in  $U$ )**.

Mit diesen neuen Begriffen lässt sich nun der folgende Satz formulieren:

**Satz 5.1** (Globaler Satz von Cauchy). *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Ferner seien  $\Gamma$ ,  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  Zykel in  $U$ , wobei  $\Gamma$  nullhomolog in  $U$  sei und  $\Gamma_1$  homolog in  $U$  zu  $\Gamma_0$  sei. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (1)  $\text{Ind}_{\Gamma}(z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$  für jedes  $z_0 \in U \setminus \text{tr}(\Gamma)$ ,
- (2)  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ ,
- (3)  $\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz$ .

Für den Beweis bemühen wir ein Lemma: (Die darin vorkommende Funktion  $g$  ist uns bereits im Beweis von Satz 2.15 begegnet, wobei dort die zweite Variable fixiert war.)

**Lemma 5.2.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann ist*

$$g: U \times U \rightarrow \mathbb{C}, \quad (z, w) \mapsto \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{falls } z \neq w, \\ f'(z) & \text{falls } z = w \end{cases}$$

stetig.

*Beweis.* Da  $U \times U \setminus \{(\zeta, \zeta) : \zeta \in U\}$  offen ist und der Ausdruck  $(f(z) - f(w))/(z - w)$  stetig in  $(z, w)$  ist, verbleibt es nur Stetigkeit in jedem Punkt  $(\zeta, \zeta) \in U \times U$  nachzuweisen. Ein solcher Punkt sei im Folgenden fixiert. Wir benutzen das bekannte  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium für Stetigkeit. Es sei  $\epsilon > 0$  gegeben und  $\delta > 0$  klein genug derart, dass

$$B_\delta = \{(z_0, w_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : \max\{|z_0 - \zeta|, |w_0 - \zeta|\} < \delta\}$$

ganz in  $U$  enthalten ist. Da  $f'$  stetig ist (gemäß Korollar 3.3 ist es ja sogar holomorph), dürfen wir davon ausgehen, dass  $\delta$  sogar so klein ist, dass  $|f'(z_0) - f'(\zeta)| < \epsilon$  für alle  $(z_0, z_0) \in B_\delta$  gilt. Sei daher nun  $(z_0, w_0) \in B_\delta$  mit  $z_0 \neq w_0$  gegeben. Wir haben

$$g(z_0, w_0) - g(\zeta, \zeta) = \frac{f(z_0) - f(w_0)}{z_0 - w_0} - f'(\zeta) = \frac{1}{z_0 - w_0} \int_{[w_0, z_0]} (f'(z) - f'(\zeta)) dz$$

(vgl. die Rechnung aus dem Beweis von Satz 2.14). Die Behauptung des Lemmas folgt nun mittels Lemma 2.6 und der Abschätzung  $|g(z_0, w_0) - g(\zeta, \zeta)| < \epsilon$ .  $\square$

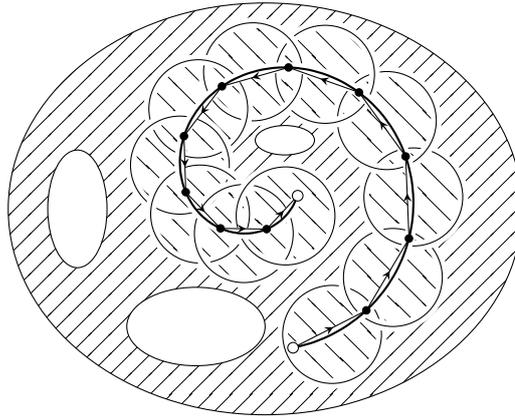
**Lemma 5.3.** *Es sei  $\Gamma$  eine beliebige Kette in einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph. Dann gibt es eine Kette  $\Gamma_* = \lambda_1 \gamma_1 + \dots + \lambda_n \gamma_n$  derart, dass alle  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) Polygonzüge sind und die folgende Gleichung gilt:*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_*} f(z) dz.$$

*Beweis.* Man kann die Methode aus dem Beweis von Lemma 4.12 benutzen. Auf die richtige Spur bringt einen dabei vielleicht die Betrachtung von Abbildung 27. Die Details hierzu seien den Leserinnen und Lesern zur Übung überlassen (Aufgabe 10.4).  $\square$

*Beweis von Satz 5.1 (nach Dixon [6]).* Wir überlegen uns zunächst, dass die letzten beiden Aussagen aus der ersten folgen. In der Tat erhält man (2) sofort, indem man  $f$  in (1) durch  $f(z)(z - z_0)$  ersetzt und die Aussage (3) erhält man unmittelbar aus (1) mit  $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_0$ . Es verbleibt also nur (1) zu zeigen.

Es sei nun  $z_0 \in U \setminus \text{tr}(\Gamma)$  fixiert. Wir dürfen o.B.d.A. davon ausgehen, dass es sich bei  $\Gamma$  um einen Zykel handelt, an dem nur Polygonzüge beteiligt sind. (Ansonsten



**Abbildung 27.** Illustration zur Beweisidee für Lemma 5.3. Mit der Zerlegung aus dem Argument von Lemma 4.12 ist man schon fast am Ziel.

ersetze  $\Gamma$  im Folgenden durch den Zykel  $\Gamma_*$ , den eine Anwendung von Lemma 5.3 auf  $\Gamma$  und die auf  $U \setminus \{z_0\}$  holomorphe Funktion  $z \mapsto f(z)/(z - z_0)$  liefert.)

Wir betrachten nun  $h: U \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$h(w) = \int_{\Gamma} g(z, w) dz,$$

mit der stetigen Funktion  $g: U \times U \rightarrow \mathbb{C}$  aus Lemma 5.2. Der Beweis von Satz 2.15 zeigt, dass es zum Beweis von (1) sicher genügt  $h(z_0) = 0$  nachzuweisen.<sup>1</sup>

Wir zeigen zunächst, dass  $h$  auf  $U$  holomorph ist und bemühen hierzu den Satz von Morera (Satz 3.6). Zu dessen Anwendung gilt es zunächst zu klären, dass  $h$  stetig ist und hierzu bemühen wir das bekannte Folgenkriterium für Stetigkeit. Es sei also  $(w_n)_n$  eine Folge in  $U$  mit Grenzwert  $w \in U$ . Dann befinden sich für hinreichend große  $n$  alle Glieder  $w_n$  in einer abgeschlossenen Kreisscheibe  $K$  um  $w$ , von der wir davon ausgehen dürfen, dass diese ganz in  $U$  enthalten ist. Nun ist aber  $g$  auf der kompakten Menge  $\text{tr}(\Gamma) \times K$  gleichmäßig stetig. Für beliebiges  $\epsilon > 0$  und alle  $z \in \text{tr}(\Gamma)$  und hinreichend große  $n$  ist dann  $|g(z, w_n) - g(z, w)| < \epsilon$ . Mit der M-L-Abschätzung (Lemma 2.6).<sup>2</sup> gewinnt man daraus dann sofort  $|h(w_n) - h(w)| < c\epsilon$  mit einer Konstante  $c$ , die nur

<sup>1</sup>Wer die Ersetzung von  $\Gamma$  durch den aus Lemma 5.3 erhaltenen Zykel hier akribisch durchführt, bemerkt, dass hier etwas unter den Tisch fällt: um bei der Berechnung der Windungszahl die vorgenommene Ersetzung wieder rückgängig machen zu dürfen, muss man streng genommen die Gleichheit aus Lemma 5.3 nicht nur für die Funktion  $z \mapsto f(z)/(z - z_0)$ , sondern auch gleichzeitig (mit demselben Polygonzug!) für  $z \mapsto 1/(z - z_0)$  zur Verfügung haben. Wer allerdings Aufgabe 10.4 sorgfältig erledigt, wird sofort sehen, dass dies ohne Probleme im Beweis von Lemma 5.3 eingerichtet werden kann.

<sup>2</sup>Um hier die M-L-Abschätzung anwenden zu können, ist es wichtig, dass an  $\Gamma$  nur Integrationswege beteiligt sind, da sonst der Begriff der *Länge* der beteiligten Wege problematisch ist. An dieser Stelle hilft Lemma 5.3.

von  $\Gamma$  abhängt (diese berechnet sich als eine geeignet skalierte Summe der Längen der an  $\Gamma$  beteiligten Polygonzüge). Also ist  $h$  stetig. Sei  $\Delta$  nun ein abgeschlossenes Dreieck in  $U$  und  $\partial\Delta$  eine geeignet orientierte Parametrisierung des Randes von  $U$ . Dann ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Fubini

$$\int_{\partial\Delta} h(w) dw = \int_{\partial\Delta} \left( \int_{\Gamma} g(z, w) dz \right) dw = \int_{\Gamma} \left( \int_{\partial\Delta} g(z, w) dw \right) dz.$$

Das innere Integral ist hier aber  $= 0$ , da für jedes fixierte  $z \in U$  die Funktion  $g(z, \cdot): U \rightarrow U$ ,  $w \mapsto g(z, w)$  holomorph ist. (Das steht für alle  $w \neq z$  sicher außer Frage, ergibt sich dann aber auch für  $w = z$ , da  $g(z, \cdot)$  bei  $z$  beschränkt bleibt und somit bei  $z$  eine hebbare Singularität besitzt; siehe Satz 3.15.) Insgesamt folgt  $\int_{\partial\Delta} h(w) dw = 0$ , wie gewünscht und  $h$  ist holomorph auf  $U$ .

Sei nun  $U_0 = \{w \in \mathbb{C} \setminus \text{tr}(\Gamma) : \text{Ind}_{\Gamma}(w) = 0\}$ . (Siehe auch Abbildung 28.) Sicherlich ist  $U_0$  offen. (Denn  $\text{Ind}_{\Gamma}(\cdot)$  ist lokal konstant; Das hatten wir in Proposition 2.9 jedenfalls für Wege bewiesen und für Zykel gilt dies damit auch.) Dann ist

$$h_0: U_0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad w \mapsto \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

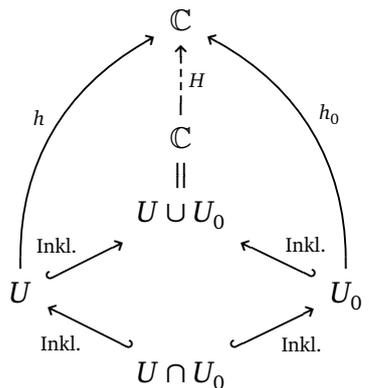
holomorph (Differenzieren unter dem Integral, Lemma 2.8) und für  $w \in U \cap U_0$  haben wir

$$h(w) = \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz}_{=h_0(w)} - \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{z-w} dz}_{=0} = h_0(w).$$

Nach Voraussetzung an  $\Gamma$  ist  $U_0 \supseteq \mathbb{C} \setminus U$  und die Rechnung von eben zeigt, dass durch

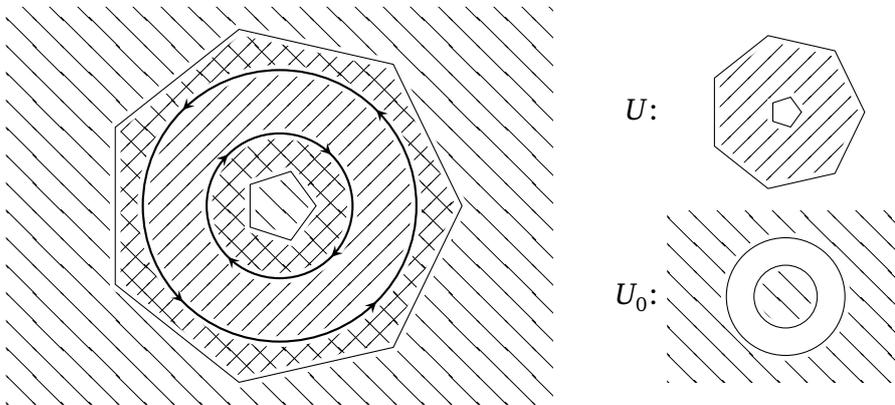
$$H: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad w \mapsto \begin{cases} h(w) & \text{falls } w \in U, \\ h_0(w) & \text{falls } w \notin U \end{cases}$$

eine holomorphe Fortsetzung von  $h$  und  $h_0$  auf ganz  $\mathbb{C}$  gegeben ist:

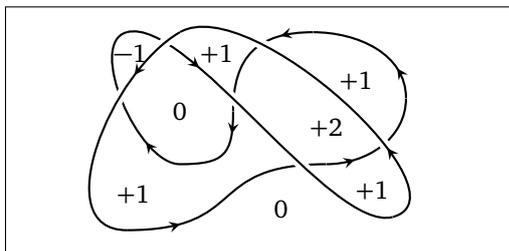


Da  $U_0$  allerdings die unbeschränkte Komponente von  $\Gamma$  enthält (vgl. Proposition 2.9), ist  $H(w)$  für große  $|w|$  gleich Null (mit demselben Argument aus Proposition 2.9).

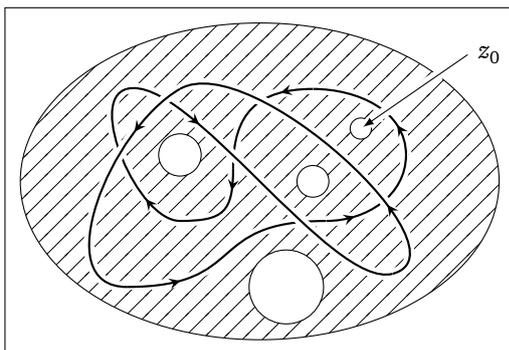
Das Identitätsprinzip (Satz 3.7) liefert nun, dass  $H$  konstant Null ist. Daraus folgt nun (1) und wir sind fertig.  $\square$



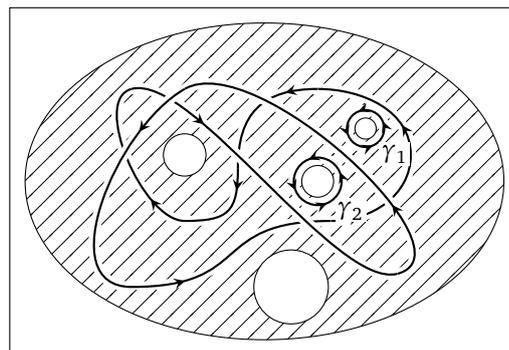
**Abbildung 28.** Illustration zum Beweis von Satz 5.1 (1). Für den Zykel  $\Gamma$  (die zwei Kreiswege) betrachtet man  $U_0 = \{w \in \mathbb{C} \setminus \text{tr}(\Gamma) : \text{Ind}_\Gamma(w) = 0\}$ .



(a) Der bereits aus Aufgabe 2.4 bekannte Weg  $\Gamma$ . Die eingezeichneten Zahlen geben jeweils die zugehörige Windungszahl von  $\Gamma$  auf der jeweiligen Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus \text{tr}(\Gamma)$  an.



(b)  $\text{Ind}_\Gamma(z_0) = 1 \neq 0$ .



(c)  $\Gamma_0 := \Gamma - \gamma_1 - 2\gamma_2$  ist nullhomolog in  $U$ .

**Abbildung 29.** Illustrationen zu Beispiel 5.4.

**Beispiele 5.4** (Zum Homologiebegriff bei Zykeln).

- (1) Der Pochhammer-Weg aus dem Beispiel von Seite 89 ist nullhomolog in  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .
- (2) Es sei  $\Gamma$  der in Abbildung 29 (a) gezeichnete Weg (als Zykel aufgefasst). In  $\mathbb{C}$  ist dieser sicher nullhomolog, denn das Komplement von  $\mathbb{C}$  relativ zu  $\mathbb{C}$  enthält ja gar keine Punkte und folglich kann  $\Gamma$  sich auch um keinen Punkt von  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C} = \emptyset$  mit nichtverschwindender Windungszahl winden.
- (3) Nun betrachten wir den obigen Zykel  $\Gamma$  in dem in Abbildung 29 (b) schraffiert gezeichneten Gebiet  $U$ . Der Zykel  $\Gamma$  ist nicht nullhomolog in  $U$ , denn er windet sich nichttrivial um den Punkt  $z_0$ .
- (4) Der Zykel  $\Gamma_0 := \Gamma - \gamma_1 - 2\gamma_2$  mit Kreiswegen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , siehe Abbildung 29 (c), ist in  $U$  nullhomolog.

## 5.2. Der Residuensatz

In Beispiel 5.4 (4) wurde aus dem Zykel  $\Gamma$  aus Teil (3) durch geeignetes Einfügen von Kreiswegen ein nullhomologer Zykel gewonnen und dies wiederum macht Satz 5.1 (2) anwendbar. Wir wollen diese Idee nun in einem Spezialfall verfolgen, in dem einerseits die Einfügbarkeit von Hilfs-Kreiswegen wie in Beispiel 5.4 (4) stets möglich ist und andererseits eine gute Chance besteht, die bei anschließender Integration auftretenden Integrale zu berechnen. Speziell schränken wir uns auf den Fall ein, wenn die Ausnahmemengen, die mit derartigen Hilfswegen „versorgt“ werden müssen, diskret sind. Wir untersuchen also Integration holomorpher Integranden mit *isolierten Singularitäten*.

Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und für ein  $z_0 \in U$  sei eine holomorphe Funktion  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben. Wir definieren dann das **Residuum von  $f$  bei  $z_0$**  als

$$\operatorname{Res}_f(z_0) := \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \epsilon)} f(z) dz$$

und überlegen uns gleich im Anschluss, weshalb der fragliche Grenzwert existiert.

**Bemerkung.** Hat  $f$  bei  $z_0$  eine hebbare Singularität, so gilt  $\operatorname{Res}_f(z_0) = 0$  (wende Satz 2.14 auf die holomorphe Fortsetzung von  $f$  auf  $U$  an). Die Umkehrung ist i.Allg. falsch, wie das Beispiel  $\operatorname{Res}_{z \mapsto 1/z^2}(0) = 0$  zeigt (siehe Beispiel 2.4 oder die hier noch folgenden Ausführungen).

Da die (als positiv orientiert aufzufassenden) Kreiswege  $\partial B(z_0, \epsilon)$  für hinreichend kleine  $\epsilon > 0$  alle in  $U \setminus \{z_0\}$  homolog zueinander sind, ist tatsächlich

$$\operatorname{Res}_f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \epsilon)} f(z) dz$$

für alle hinreichend kleinen  $\epsilon > 0$ , dank Satz 5.1 (3). Entwickelt man  $f$  in eine auf  $B(z_0, 2\epsilon) \setminus \{z_0\} \subseteq U$  konvergente Laurentreihe um  $z_0$ ,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (z \in B(z_0, 2\epsilon) \setminus \{z_0\}),$$

so erhält man gemäß der Cauchyschen Integralformel für Laurentkoeffizienten (Lemma 3.17)

$$(5.1) \quad a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \epsilon)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-1+1}} dz = \text{Res}_f(z_0).$$

**Satz 5.5** (Residuensatz). *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $\mathcal{P} \subseteq U$  eine Menge ohne Häufungspunkt in  $U$ . Ferner sei  $f: U \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\Gamma$  ein in  $U$  nullhomologer Zykel in  $U$  mit  $\text{tr}(\Gamma) \cap \mathcal{P} = \emptyset$ . Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{z_0 \in \mathcal{P}} \text{Ind}_{\Gamma}(z_0) \text{Res}_f(z_0),$$

wobei in der auftretenden Summation  $\text{Ind}_{\Gamma}(z_0) \neq 0$  für höchstens endlich viele  $z_0 \in \mathcal{P}$  gilt.

*Beweis.* Wir nehmen zwecks Erzeugung eines Widerspruchs an, dass  $\mathcal{P}' := \{z_0 \in \mathcal{P} : \text{Ind}_{\Gamma}(z_0) \neq 0\}$  nicht endlich sei. Da  $\Gamma$  eine endliche Linearkombination von geschlossenen Wegen ist und jeder davon nur Punkte in einer beschränkten Menge umläuft, ist die Menge der von  $\Gamma$  in  $\mathbb{C}$  umlaufenen Punkte beschränkt. Also muss  $\mathcal{P}'$  einen Häufungspunkt  $\zeta$  haben. Nach Voraussetzung an  $\mathcal{P}$  liegt dieser Häufungspunkt dann auf dem Rand von  $U$  und da  $\text{tr}(\Gamma)$  einen positiven Abstand zu  $\partial U$  hat (siehe Aufgabe T1.2), gibt es eine offene Kreisscheibe  $B(\zeta, \epsilon)$  um  $\zeta$ , die keine Punkte von  $\text{tr}(\Gamma)$  enthält. Da die Windungszahl lokal konstant ist (denn sie ist es laut Proposition 2.9 für alle Wege, aus denen sich  $\Gamma$  zusammensetzt) und nach Konstruktion  $\mathcal{P}' \cap B(\zeta, \epsilon) \neq \emptyset$  ist, folgt  $\text{Ind}_{\Gamma}(z) \neq 0$  für alle  $z \in B(\zeta, \epsilon)$ . Da  $\zeta$  aber ein Randpunkt von  $U$  ist, gibt es aber ein  $z \in B(\zeta, \epsilon)$  welches nicht in  $U$  enthalten ist. Dieses wird aber, wie eben gesehen, von  $\Gamma$  umlaufen, was im Widerspruch zur Annahme steht, dass  $\Gamma$  in  $U$  nullhomolog ist. Also ist  $\mathcal{P}'$  doch endlich.

Es sei nun  $\epsilon > 0$  so klein, dass die (endlich vielen!) Kreisscheiben  $\bar{B}(z_0, \epsilon)$  für  $z_0 \in \mathcal{P}'$  alle paarweise disjunkt sind und ganz in  $U$  enthalten sind. Wir schreiben  $\gamma_{z_0}$  für den positiv orientierten Kreisweg  $\partial B(z_0, \epsilon)$  und betrachten dann den Zykel

$$\Gamma_0 := \Gamma - \sum_{z_0 \in \mathcal{P}'} \text{Ind}_{\Gamma}(z_0) \gamma_{z_0}.$$

Dieser ist, wie man leicht nachrechnet, nullhomolog in  $U \setminus \mathcal{P}$ . Satz 5.1 (2) liefert dann

$$0 = \int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz - 2\pi i \sum_{z_0 \in \mathcal{P}'} \text{Ind}_{\Gamma}(z_0) \text{Res}_f(z_0). \quad \square$$

**Bemerkung.** Im Beweis von Satz 5.5 haben wir aus dem in  $U$  nullhomologen Zykel  $\Gamma$  einen in  $U \setminus \mathcal{P}$  nullhomologen Zykel  $\Gamma_0$  konstruiert, auf den man dann Satz 5.1 (2) anwenden konnte. Man beachte, dass „nullhomolog in  $U \setminus \mathcal{P}$  sein“ mehr fordert, als „nullhomolog in  $U$  sein“, da ja das Komplement von  $U \setminus \mathcal{P}$  (relativ zu  $\mathbb{C}$ ) höchstens mehr Punkte enthält, als das Komplement von  $U$ .

Für Anwendungen des Residuensatzes ist es notwendig, Residuen einfach bestimmen zu können. Hierzu die Integraldarstellung heranzuziehen, welche wir zur Definition des Residuums benutzt hatten, wäre oft anstrengend. Es geht jedoch einfacher, wenn man sich an die Formel (5.1) erinnert, welche das Residuum  $\text{Res}_f(z_0)$  als den Laurentkoeffizienten zum Index  $-1$  in der Laurent-Entwicklung von  $f$  um den Entwicklungspunkt  $z_0$  identifiziert. Wir gehen nun davon aus, dass  $f$  bei  $z_0$  einen Pol mit  $|\text{ord}_f(z_0)| \leq m$ ; dann haben wir die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle  $z \neq z_0$  in einer genügend kleinen Umgebung von  $z_0$ .<sup>3</sup> Insbesondere hat

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z - z_0)^k =: h(z)$$

eine hebbare Singularität bei  $z_0$ , die wir uns bei  $h$  bereits als gehoben vorstellen möchten (wir erlauben es uns also  $z_0$  für  $z$  in den  $h$ -definierenden Ausdruck einzusetzen). Der gesuchte Koeffizient  $a_{-1} = \text{Res}_f(z_0)$  ist nun aber nur noch ein Taylorkoeffizient (zu  $k = m-1$ ) von  $h$  bei  $z_0$  und diese erhält man bekanntlich auch als Ableitungswerte von  $h$  (siehe die Formel in Satz 3.2):

$$\frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = a_{(m-1)-1} = \text{Res}_f(z_0).$$

**Proposition 5.6** (Residuenformel). *Es sei  $f: B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit einem Pol der Ordnung  $|\text{ord}_f(z_0)| \leq m$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Es ist*

$$\text{Res}_f(z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z),$$

wobei  $g$  die holomorphe Fortsetzung von  $B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ , auf  $B(z_0, \epsilon)$  bezeichne.

---

<sup>3</sup>Da wir nicht  $\text{ord}_f(z_0) = -m$  gefordert haben, mag es sein, dass hier einige der Koeffizienten  $a_{-m}, a_{-m+1}, \dots, a_{-1}$  verschwinden, aber das ist für die weitere Argumentation tatsächlich irrelevant.

- (2) Falls sich  $f$  als Quotient  $f = P/Q$  zweier auf  $B(z_0, \epsilon)$  holomorpher Funktionen  $P$  und  $Q$  schreibt, wobei  $Q$  bei  $z_0$  eine einfache Nullstelle besitzt, so gilt

$$\operatorname{Res}_f(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{P(z)}{Q'(z)}.$$

*Beweis.* Den ersten Teil haben wir bereits bewiesen und der zweite Teil folgt direkt aus dem ersten durch Einsetzen.  $\square$

### Beispiele.

- (1) Wir betrachten  $f(z) = \sin(z)/z$ . Mit der Potenzreihendarstellung

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

erhält man für  $z \neq 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}.$$

Dies ist aber auch schon die Laurententwicklung von  $f$  im „Kreisring“  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  und der Koeffizient zum Index  $-1$  ist  $0$ , also  $\operatorname{Res}_f(0) = 0$ . Für alle anderen  $z_0 \in \mathbb{C}$  gilt aber auch  $\operatorname{Res}_f(z_0) = 0$ , denn für  $z_0 \neq 0$  ist  $f$  ja holomorph in einer Umgebung von  $z_0$ . (Für  $z_0 = 0$  in gewissem Sinne auch, wie wir eben gesehen haben, da  $f$  bei  $0$  ja eine hebbare Singularität besitzt.)

- (2) Alternativ benutzt man die Formel aus Proposition 5.6 (2) und erhält

$$\operatorname{Res}_f(0) = \frac{\sin(0)}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

- (3) Wir betrachten nun  $g(z) = 1/f(z) = z/\sin(z)$  für  $z \in B(0, \pi) \setminus \{0\}$ . Hier die Laurententwicklung von  $g$  auf  $B(0, \pi) \setminus \{0\}$  zu bestimmen wäre unnötig kompliziert. Proposition 5.6 (2) liefert nämlich sofort

$$\operatorname{Res}_g(0) = \frac{0}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

### 5.3. Anwendungen

Wir illustrieren den Residuensatz anhand zweier Anwendungen. Die erste ermöglicht es, *Fouriertransformationen* von rationalen Funktion zu bestimmen und die zweite ermöglicht analoges für verwandte *Mellintransformationen*. Man sollte weder Satz 5.7 noch Satz 5.8 als besonders wichtig ansehen (in der Tat wird keiner der beiden Sätze im Folgenden irgendwo weiter benutzt), sondern sich eher merken, dass in den geführten Beweisen eine *Methode* illustriert wird, mit der man verschiedene Integrale (zu deren Betrachtung man irgendwann vielleicht doch gewogen ist) berechnen kann. Auch, dass hier nur rationale Funktionen auftauchen, ist kein prinzipielles Problem, sondern lediglich dem Wunsch nach Einfachheit geschuldet. So hatten wir

beispielsweise schon in Beispiel 2.13 eine etwas interessantere Fouriertransformierte berechnet und der Weg dahin benutzte einige Symmetrieeigenschaften der Exponentialfunktion. Unsere hier vorgenommene Beschränkung auf rationale Funktionen erlaubt es uns, derartige Tricks zu vermeiden und stattdessen mit schnellem Abfallen bei  $|z| \rightarrow \infty$  zu argumentieren. Das Anwenden des Residuensatzes (insbesondere in der hier vorgeführten Form) bezeichnet man oft auch als **Residuenkalkül**. In diesem Zusammenhang siehe auch Aufgaben 10.2 und 10.3 und Aufgaben 11.1 bis 11.3. Eine sehr umfangreiche Zusammenstellung von Anwendungen des Residuenkalküls findet man im Werk von Mitrinović und Kečkić [13] (man beachte insbesondere die praktische Übersichtstabelle in [13, § 5.5]).

**Bemerkung.** Das Integral in Satz 5.7 wird bewusst mit Vorsicht notiert:  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r$  statt  $\int_{-\infty}^{\infty}$ . Dies hängt damit zusammen, dass das uneigentliche Integral

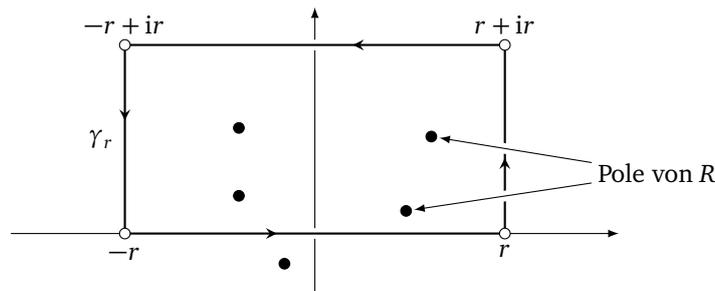
$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \exp(ix) dx$$

nicht existiert, falls  $R$  als rationale Funktion mit Zählergrad gleich Nennergrad minus Eins gewählt ist.

**Satz 5.7** (Fourier-Inversion rationaler Funktionen). *Es sei  $R: \mathbb{C} \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  eine rationale Funktion mit<sup>4</sup>  $R(z) \rightarrow 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$  und polstellenfrei auf  $\mathbb{R}$ . Dann ist*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r R(x) \exp(ix) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_0) > 0} \operatorname{Res}_{z \rightarrow R(z) \exp(iz)}(z_0)$$

*Beweis.* Für  $r > 0$  hinreichend groß enthält das Rechteck mit den Eckpunkten  $\pm r$  und  $\pm r + ir$  sämtliche Polstellen  $z_0$  von  $R$  mit  $\operatorname{Im}(z_0) > 0$ . Es bezeichne  $\gamma_r$  seinen positiv orientierten Rand:



Aus dem Residuensatz (Satz 5.5) folgt dann

$$\int_{\gamma_r} R(z) \exp(iz) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_0) > 0} \operatorname{Res}_{z \rightarrow R(z) \exp(iz)}(z_0).$$

<sup>4</sup>Äquivalent hierzu ist offensichtlich, dass der Zählergrad bei einem  $R$ -definierenden Bruch von Polynomen echt kleiner ist als der auftretende Nennergrad.

Man sieht, dass der Beitrag von der Integration über die horizontale Strecke  $[r + ir, r - ir]$  für  $r \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, denn der Integrand wird dort deutlich schneller klein, als  $[r + ir, r - ir]$  lang wird:

$$|R(z) \exp(iz)| \leq \max_{t \in [-r, r]} |R(t + ir)| \exp(-r)$$

Die Beiträge von den beiden vertikalen Strecken sind ein wenig subtiler, aber auch nicht wirklich schwierig:<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \left| \int_0^r R(\pm r + it) \exp(i(r + it)) i dt \right| &\leq \int_0^r |R(\pm r + it) \exp(i(r + it))| dt \\ &\leq \max_{\tau \in [0, r]} |R(\pm r + i\tau)| \int_0^\infty \exp(-t) dt \end{aligned}$$

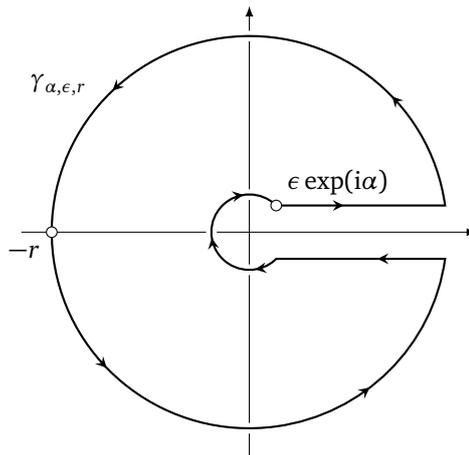
und dieser konvergiert wegen  $R(z) \rightarrow 0$  (für  $|z| \rightarrow \infty$ ) für  $r \rightarrow \infty$  gegen 0. Der Beitrag von der Strecke  $[-r, r]$  konvergiert für  $r \rightarrow \infty$  offenbar gegen den Grenzwert auf der linken Seite der im Satz behaupteten Formel.  $\square$

**Satz 5.8** (Mellin-Inversion rationaler Funktionen). *Es sei  $0 < \lambda < 1$  und  $R$  eine rationale Funktion ohne Pole auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $R(z) \rightarrow 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$ . Dann ist*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r R(x) x^\lambda dx = \frac{2\pi i}{1 - \exp(2\pi i \lambda)} \sum_{z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}} \operatorname{Res}_{z \rightarrow R(z)} z^\lambda(z_0),$$

wobei  $z^\lambda$  hier als  $\exp(L(z)\lambda)$  definiert sei und  $L: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  denjenigen Logarithmuszweig bezeichne, der auf den Streifen  $\{x + iy : 0 < y < 2\pi\}$  abbildet.

*Beweis.* Für Parameter  $0 < \alpha < \pi/4$ ,  $0 < \epsilon < r$  betrachten wir den folgenden Weg  $\gamma_{\alpha, \epsilon, r}$ :



<sup>5</sup>Für die erste Ungleichung siehe den Beweis von Lemma 2.6.

Wählt man  $\alpha$  und  $\epsilon$  hinreichend klein und  $r$  hinreichend groß, so lässt sich erreichen, dass alle isolierten Singularitäten von  $f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto R(z)z^\lambda$ , von  $\gamma_{\alpha, \epsilon, r}$  mit Windungszahl +1 umlaufen werden. Aus dem Residuensatz (Satz 5.5) folgt

$$\int_{\gamma_{\alpha, \epsilon, r}} R(z)z^\lambda dz = \sum_{z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}} \text{Res}_f(z_0).$$

Wir lassen nun  $\alpha \searrow 0$ . Man rechtfertigt entweder mittels der M-L-Abschätzung (Lemma 2.6) oder mittels analytischer Fortsetzung des im Term  $z^\lambda$  versteckten Logarithmus (für letzteres vgl. die Ausführungen in der Vorlesung), dass die Integrale entlang der vertikalen Strecken (siehe obige Skizze) unter diesem Grenzprozess gegen

$$\int_{\epsilon}^r R(x) \exp(\log(x)\lambda) dx = \int_{\epsilon}^r R(x)x^\lambda dx$$

respektive

$$-\int_{\epsilon}^r R(x) \exp((\log(x) + 2\pi i)\lambda) dx = -\exp(2\pi i\lambda) \int_{\epsilon}^r R(x)x^\lambda dx$$

konvergieren. (Das negative Vorzeichen vor dem zweiten Integral stammt hier von der Orientierung des unteren Weges.) Man argumentiert weiter mittels der M-L-Abschätzung, dass die Beiträge der Integrale über die obigen Kreise<sup>6</sup> für  $\epsilon \searrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$  gegen Null konvergieren. Durch Sammeln der bisherigen Ergebnisse kommt

$$\sum_{z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}} \text{Res}_f(z_0) = \lim_{\substack{\epsilon \searrow 0 \\ r \rightarrow \infty}} \lim_{\alpha \searrow 0} \int_{\gamma_{\alpha, \epsilon, r}} R(z)z^\lambda dz = (1 - \exp(2\pi i\lambda)) \int_0^{\infty} R(x)x^\lambda dx.$$

Durch Umstellen ergibt sich die Behauptung. □

**Bemerkung.** Im obigen Beweis kommen drei Grenzprozesse vor:  $\alpha \searrow 0$ ,  $\epsilon \searrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ . Den ersten Grenzprozess jedenfalls vor dem dritten auszuführen erweist sich hier als technisch günstig, falls man plant die vertikalen Segmente mittels der M-L-Abschätzung zu bearbeiten. (Denn für  $r \rightarrow \infty$  geht die Länge jener Segmente ja gegen unendlich und wenn man dann noch den Integranden  $R(z)z^\lambda$  auf diesen Segmenten mit  $R(x) \exp(\log(x)\lambda)$  bzw.  $R(x) \exp((\log(x) + 2\pi i)\lambda)$  ( $x$  reell) zu vergleichen hat, so ist erst mal nicht mehr klar, ob nach der Integration über die dann unendlich langen vertikalen Segmente der Fehler nicht ausreißt.)

#### 5.4. Das Null- und Polstellen zählende Integral

Zur Motivation der noch kommenden Resultate, beginnen wir mit einer *mathematisch nicht stichhaltigen* Vorüberlegung. (Rigorese Argumente liefern wir später.) Wir betrachten eine meromorphe Funktion  $f$  in der Umgebung einer Null- oder Polstelle  $z_0$  von dieser und gehen davon aus, dass  $f$  dort nicht konstant ist. Mit  $k = \text{ord}_f(z_0)$

<sup>6</sup>In der Skizze natürlich *Kreisbögen*, aber zum aktuellen Zeitpunkt wurde ja bereits der Grenzprozess  $\alpha \searrow 0$  vollzogen und somit die Bögen zu Kreisen komplettiert.

können wir  $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$  mit einer geeigneten in einer Umgebung von  $z_0$  holomorphen und dort nullstellenfreien Funktion  $g$  schreiben. Wir betrachten nun „ $\log(f(z))$ “ und ignorieren etwaige Probleme bezüglich dessen, was für eine komplexe Zahl nun mit dem Logarithmus gemeint sein soll. Durch blauäugige Anwendung der Rechenregeln für die *reelle* Logarithmusfunktion, lässt sich

$$(5.2) \quad \log(f(z)) = k \log(z - z_0) + \log g(z)$$

vermuten. (Die Hoffnung ist hier, die unbekannte Funktion  $g$  von dem deutlich einfacheren Term  $(z - z_0)^k$  „abspalten“ zu können und genau das leistet der Logarithmus hier.) Schreiben wir für den Moment  $\varrho = 2\pi i$ , so sieht man sofort

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(\exp(\varrho 3/8)^2) &= \operatorname{Log}(\exp(\varrho 3/4)) = \operatorname{Log}(\exp(-\varrho/4)) \\ &= -\varrho/4 = 2 \cdot \varrho 3/8 - \varrho \\ &= 2 \cdot \operatorname{Log}(\exp(\varrho 3/8)) - \varrho, \end{aligned}$$

wobei  $\operatorname{Log}$  den Hauptzweig des Logarithmus bezeichne. Die aus der reellen Analysis bekannte Formel

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad (x, y \text{ reell und positiv})$$

überträgt sich also nicht direkt ins Komplexe; die Gültigkeit von (5.2) bleibt also zweifelhaft. Tatsächlich kann man sich überlegen, dass (5.2) bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi i$  (als „Korrekturterm“) doch richtig bleibt. Da wir uns durch die Betrachtung des Ausdrucks „ $\log(f(z))$ “ ja ohnehin schon in schmutziges Gewässer begeben haben, tun wir nun einmal so, als sei der in (5.2) noch einzufügende Korrekturterm lokal konstant (auch das sollte einem mit Blick auf die Null- oder Polstelle von  $f$  bei  $z_0$  irgendwie komisch vorkommen). Durch Ableiten wird dieser dann vermutlich wieder verschwinden. Beherrztes Ableiten von (5.2) führt nun auf

$$(5.3) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Man beachte: obgleich unsere Ausführungen mit „ $\log(f(z))$ “ mehr als fragwürdig erscheinen müssen, lassen sich die in der letzten Gleichung auftretenden Ausdrücke problemlos für alle  $z$  in einer geeigneten punktierten Umgebung von  $z_0$  hinschreiben ( $f$  ist in dieser ja sicher Null- und Polstellenfrei und selbiges gilt für  $g$ ). Überdies ist besitzt  $g'/g$  in einer Umgebung von  $z_0$  eine Stammfunktion wegen  $g(z_0) \neq 0$  (siehe Aufgabe 9.4). Bei Integration von  $f'/f$  entlang eines positiv orientierten Kreisweges  $\gamma$  mit Mittelpunkt  $z_0$  (und geeignet kleinem Radius) erwarten wir also

$$(5.4) \quad \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{k}{z - z_0} dz + \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 2\pi i k \operatorname{Ind}_{\gamma}(z_0) + 0 = 2\pi i k.$$

Das Integral linker Hand „detektiert“ also  $k = \operatorname{ord}_f(z_0)$ !

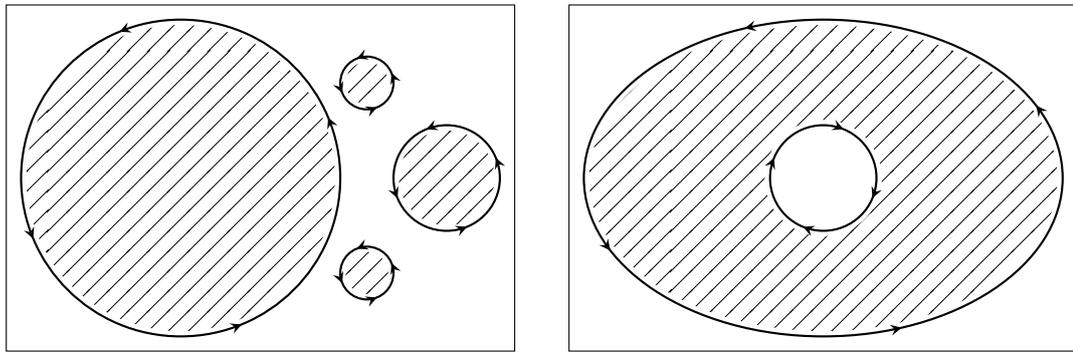
**Lemma 5.9** (Rechenregel für logarithmisches Ableiten). *Sind  $g$  und  $h$  holomorph in einer Umgebung von  $z$  und dort nullstellenfrei, so gilt*

$$\frac{(g \cdot h)'(z)}{(g \cdot h)(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt sofort aus der Produktregel:

$$\frac{(g \cdot h)'(z)}{(g \cdot h)(z)} = \frac{g'(z)h(z) + g(z)h'(z)}{g(z)h(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{h'(z)}{h(z)}. \quad \square$$

Wir führen noch eine Sprechweise ein: ein Zykel  $\Gamma$  in  $\mathbb{C}$  **berandet**  $U \subseteq \mathbb{C}$ , falls  $\text{Ind}_\gamma(\cdot)$  nur die Werte 0 und 1 annimmt und  $U$  genau als allen Punkten  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Ind}_\gamma(z_0) = 1$  besteht (vgl. Abbildung 30).



(a) Ein Zykel, der eine unzusammenhängende Menge (schraffiert) berandet.

(b) Ein Zykel, der ein Gebiet (schraffiert) mit einem Loch berandet.

**Abbildung 30.** Illustrationen zum Begriff des „Berandens“. Als Gegenbeispiel beachte man, dass etwa der Zykel aus Abbildung 29 (a) keine Menge berandet, da dieser nicht bloß Windungszahlen 0 und 1 annimmt.

**Satz 5.10** (Das Null- und Polstellen zählende Integral). *Es sei  $f$  meromorph auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  und nirgends lokal konstant. Ferner sei  $\Gamma$  ein Zykel in  $U$ , welcher eine Menge  $A \subset U$  berandet und dessen Spur weder Nullstellen noch Pole von  $f$  enthält. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{z_0 \in A} \text{ord}_f(z_0) \\ &= \#\{\text{Nullstellen von } f \text{ in } A\} - \#\{\text{Polstellen von } f \text{ in } A\}, \end{aligned}$$

wobei Null- und Polstellen gemäß ihrer Ordnung zu zählen sind. (In der auftretenden Summe über  $z_0 \in A$  gilt  $\text{ord}_f(z_0) \neq 0$  höchstens für endlich viele  $z_0$ .)

*Beweis.* Wir beweisen ein noch geringfügig allgemeineres Ergebnis, welches besagt, dass man in der Formel des Satzes auch eine beliebige holomorphe *Gewichtsfunktion* einfügen darf. Es sei hierzu  $w: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann behaupten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} w(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_0 \in A} w(z_0) \operatorname{ord}_f(z_0).$$

(Die Aussage des Satzes entspricht offenbar dem Fall  $w = (z \mapsto 1)$ .) Zum Beweis der eben gemachten Behauptung bemerken wir zunächst, dass man wie im Beweis des Residuensatzes (Satz 5.5) sieht, dass  $A$  nur endlich viele Null- und Polstellen von  $f$  enthält und an anderen Punkten  $z_0 \in A$  gilt ohnehin  $\operatorname{ord}_f(z_0) = 0$ . (Für Polstellen wurde dies im Rahmen von Satz 5.5 schon bewiesen. Die Aussage über Nullstellen bekommt man hieraus allerdings auch, indem man  $1/f$  statt  $f$  betrachtet.) Die Holomorphie von  $h: z \mapsto w(z)f'(z)/f(z)$  steht in allen Punkten von  $U$  außer Frage, wenn es sich bei diesen nicht um Pol- oder Nullstellen handelt. Ist nun  $z_0$  eine Pol- oder Nullstelle, so folgt aus Lemma 5.9 (siehe (5.3) und (5.4))  $\operatorname{Res}_h(z_0) = w(z_0) \operatorname{ord}_f(z_0)$ . Die Behauptung ergibt sich nun direkt aus dem Residuensatz.  $\square$

**Korollar 5.11** (Null- und Polstellen zählende Windungszahl). *Es sei  $f$  meromorph auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  sei ein geschlossener Integrationsweg in  $U$ , welcher eine Menge  $A \subset U$  berandet und  $\operatorname{tr}(\gamma)$  treffe weder Null- noch Polstellen von  $f$ . Dann gilt*

$$\operatorname{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \#\{\text{Nullstellen von } f \text{ in } A\} - \#\{\text{Polstellen von } f \text{ in } A\},$$

wobei Null- und Polstellen gemäß ihrer Ordnung zu zählen sind.

*Beweis.* Die Behauptung folgt sofort aus Satz 5.10 unter Beachtung von

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{f \circ \gamma}(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(w)}{f(w)} dw. \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung.** Die Aussage von Korollar 5.11 bleibt auch gültig, wenn man  $\gamma$  nur als geschlossenen Weg voraussetzt. In diesem Fall muss man sich beim Beweis allerdings etwas mehr Mühe geben, da man nicht von  $\gamma'$  sprechen kann. Wir verzichten auf die Details.

Satz 5.10 und Korollar 5.11 bezeichnet man auch gelgentlich als **Argumentprinzip**.

**Satz 5.12** (Rouché). *Es seien  $f, \delta: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  sei ein geschlossener Integrationsweg in  $U$ , welcher eine Menge  $A \subset U$  berandet. Ferner gelte  $|\delta(z)| < |f(z)|$  für alle  $z \in \operatorname{tr}(\gamma)$ . Dann haben  $f$  und  $f + \delta$  in  $A$  (mit Vielfachheit gezählt) gleich viele Nullstellen.*

*Beweis.* Wegen der Ungleichung  $|\delta(z)| < |f(z)|$  (für  $z \in \text{tr}(\gamma)$ ) folgt, dass für solche  $z$  die abgeschlossene Kreisscheibe  $\overline{B}(f(z), |\delta(z)|)$  nicht den Nullpunkt enthält (vgl. auch die recht alte Abbildung 2 auf Seite 5 in Kapitel 1). Diese enthält allerdings jede Konvexkombination  $(1-s)(f+\delta)(z) + sf(z)$ . Hieraus ergibt sich, dass es sich bei

$$H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad (t, s) \mapsto (1-s)((f+\delta) \circ \gamma)(t) + s(f \circ \gamma)(t)$$

um eine Homotopie zwischen  $(f+\delta) \circ \gamma$  und  $f \circ \gamma$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  handelt. Insbesondere trifft  $\text{tr}(\gamma)$  auch keine Nullstellen von  $f+\delta$  oder  $f$ . Aus der Homotopieinvarianz des Wegintegrals (Satz 4.13) ergibt sich dann

$$\text{Ind}_{(f+\delta) \circ \gamma}(0) = \int_{(f+\delta) \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0).$$

Mit Korollar 5.11 folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** Den Satz von Rouché (Satz 5.12) hätte man auch für Zykel  $\Gamma$  beweisen können, an denen nur Integrationswege beteiligt sind und die eine Menge beranden. Hierzu ist der obige Beweis lediglich mit Linearität auf die beteiligten Integrationswege zu übertragen. Ja, man hätte statt Integrationswegen sogar von allgemeinen geschlossenen Wegen sprechen dürfen, wenn man Korollar 5.11 für solche Wege bewiesen hätte.

Wir schließen mit einer anschaulichen Überlegung zum Satz von Rouché bzw. dessen Beweis. Für ein etwas theoretischeres Beispiel, siehe hingegen Abbildung 31.

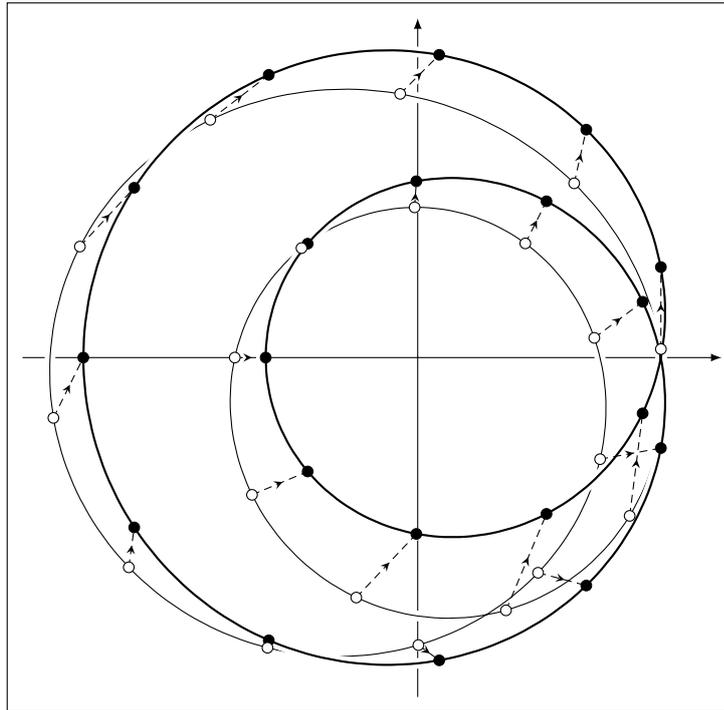
**Bemerkung** (Hundeleinenlemma). Die im Beweis von Satz 5.12 benutzte Tatsache, dass zwei Wege  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  mit

$$|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < |\gamma_1(t)| \quad (t \text{ aus dem Parameterintervall})$$

in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  homotop sind, wird auch „Hundeleinenlemma“ genannt. Hier interpretiert man  $\gamma_0(t)$  als die Position eines Hundes zum Zeitpunkt  $t$  und  $\gamma_1(t)$  als die Position des zugehörigen Herrchens. Man stelle sich nun beide Wege als geschlossen vor (Hund und Herrchen kehren nach ihrer Tour wieder an den Startpunkt zurück) und den Nullpunkt in  $\mathbb{C}$  als ein unüberquerbares Hindernis (z.B. einen Laternenmast). Die obige Ungleichung besagt, dass sich der Hund (welcher vom Herrchen an einer Leine geführt wird) nie so weit vom Herrchen entfernt, als dass er die Laterne treffen könnte. Die Homotopie (in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) der Wege von Hund und Herrchen impliziert nun, dass Hund und Herrchen die Laterne genau gleich oft umlaufen.

### 5.5. Der Satz von Gauß–Lucas und eine Vermutung von Sendov

In diesem Abschnitt besprechen wir interessante Eigenschaften von Polynomen, deren Ableitung und der Verteilung ihrer Nullstellen. Für das weitere Verständnis der Vorlesung ist dies nicht wichtig, allerdings ist es aus mathematischer Sicht sehr hübsch und hat, wie unten klar wird, auch in der aktuellen Forschung einige Relevanz.



**Abbildung 31.** Illustration zum Beweis vom Satz von Rouché (Satz 5.12) und der dort benutzten Homotopie  $H$ . Hier ist  $f(z) = 8z^2 + 3iz$ ,  $\delta(z) = z^3 - 1 - i\exp(z)$  und  $\gamma(t) = \exp(2\pi it)$  parametrisiert  $\partial\mathbb{D}$ . Gezeichnet sind der Weg  $(f + \delta) \circ \gamma$  (dünn) und der Weg  $f \circ \gamma$  (dick), sowie das Verhalten der Homotopie  $H$ , welche  $((f + \delta) \circ \gamma)(t)$  (weiße Punkte) geradlinig in  $(f \circ \gamma)(t)$  übergehen lässt. Man sieht leicht, dass sich  $f \circ \gamma$  genau zwei mal um den Nullpunkt windet. Selbiges gilt dann (wie man ebenfalls leicht sieht, aber auch durch den Beweis von Satz 5.12 garantiert bekommt) auch für  $(f + \delta) \circ \gamma$ . Insbesondere haben  $f$  und  $f + \delta$  jeweils genau zwei Nullstellen in  $\mathbb{D}$ . Die Nullstellen von  $f$  sind tatsächlich genau  $0$  und  $-\frac{3}{8}i$ . Beim Versuch die Nullstellen von  $f + \delta$  zu finden, liefert das Computeralgebrasystem Mathematica die Fehlermeldung: „*This system cannot be solved with the methods available to Solve.*“ Wir wissen aber dennoch(!) aus theoretischen Gründen, dass  $f + \delta$  genau zwei Nullstellen in  $\mathbb{D}$  besitzt.

Der Beweis des folgenden Satzes basiert auf Eigenschaften der logarithmischen Ableitung (siehe (5.3)), ist aber insgesamt völlig elementar und benutzt keine komplexe Analysis. (Der Fundamentalsatz der Algebra, Satz 1.2, wird allerdings doch gebraucht.) Für eine Illustration zur Aussage des Satzes, siehe Abbildung 32.

**Satz 5.13** (Gauß–Lucas). *Es sei  $P \in \mathbb{C}[Z]$  ein nichtkonstantes Polynom und  $P'$  bezeichne dessen Ableitung. Dann ist die Menge der Nullstellen von  $P'$  enthalten in der konvexen Hülle der Nullstellen von  $P$ .*

*Beweis.* Es sei  $w$  eine Nullstelle von  $P'$  und  $z_1, \dots, z_n$  bezeichnen die  $n = \deg P$  Nullstellen von  $P$ . (Wir fordern hier nicht, dass die  $z_k$  paarweise verschieden sind.) Bezeichnet  $a$  den Leitkoeffizienten von  $P$  so haben wir die Faktorisierung

$$P = a \prod_{k=1}^n (Z - z_k).$$

Ist  $w = z_k$  für ein  $k$ , so ist  $w$  trivialerweise in der konvexen Hülle der Nullstellen von  $P$  enthalten. Darum sei nun  $P(w) \neq 0$  angenommen. Dann ist

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z - z_k}.$$

Einsetzen von  $w$  liefert

$$0 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{w - z_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{w} - \bar{z}_k}{|w - z_k|^2}, \quad \text{also} \quad w \sum_{k=1}^n \frac{1}{|w - z_k|^2} = \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{|w - z_k|^2}.$$

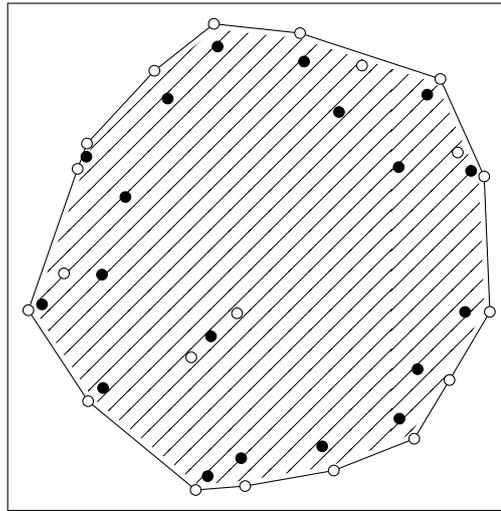
Darum schreibt sich  $w = \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_n z_n$  mit

$$\lambda_k := \frac{1}{|w - z_k|^2} / \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{|w - z_\ell|^2} \quad \text{und} \quad 1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

Also lässt sich  $w$  als Konvexkombination der Nullstellen von  $P$  schreiben.  $\square$

Wir betrachten nun Polynome  $P \in \mathbb{C}[Z]$  vom Grad  $n \geq 2$ , deren Nullstellen vollständig in der abgeschlossenen  $\overline{\mathbb{D}}$  Einheitskreisscheibe enthalten sind. (Diese Bedingung ist im Wesentlichen eine Normalisierung; man kann aus jedem komplexen Polynom ein derartiges Polynom gewinnen, indem man die auftretende Variable  $Z$  durch  $aZ + b$  mit  $a, b \in \mathbb{C}$  geeignet,  $a \neq 0$ , ersetzt. Das verändert nicht die „Form“ der Nullstellenmenge, sondern verschiebt und skaliert diese nur in der komplexen Ebene.) Laut dem Satz von Gauß–Lucas (Satz 5.13) liegen die Nullstellen von  $P'$  dann auch in  $\overline{\mathbb{D}}$ . Da der Durchmesser von  $\overline{\mathbb{D}}$  gleich 2 ist, gibt es also zu jeder Nullstelle  $z$  von  $P$  eine Nullstelle  $w$  von  $P'$ , mit Abstand  $|z - w| \leq 2$ .

Eine berühmte **Vermutung von Blagowest Sendov** behauptet, dass man tatsächlich sogar stets eine Nullstelle  $w$  von  $P'$  mit  $|z - w| \leq 1$  finden kann. Diese Vermutung ist trotz der scheinbar geringen Verschärfung der Konstante 2 zu 1 und ihrer elementaren Art (es geht ja „nur“ um Polynome und ihre Nullstellen!) bis heute ungelöst. Nichtsdestotrotz gelang Terence Tao [19] im Dezember 2020 ein wesentlicher Durchbruch; er konnte die Vermutung für alle hinreichend großen Grade  $n$  beweisen. Was hier „hinreichend groß“ ist, wird in Taos Arbeit allerdings nicht näher untersucht.



**Abbildung 32.** Illustration zum Satz von Gauß–Lucas (Satz 5.13). Gezeichnet sind die Nullstellen (weiße Punkte) eines zufällig gewählten Polynoms  $P$  vom Grad 20, deren konvexe Hülle (schraffiert) und die Nullstellen von  $P'$  (schwarze Punkte). Letztere befinden sich offenbar sämtlich in der schraffierten Menge.



## Folgen holomorpher Funktionen

Aus der reellen Analysis kennt man diverse Operationen, welche aus vorhandenen Funktionen mit handhabbaren Eigenschaften (etwa Differenzierbarkeit) neue gebären. Dabei gibt es eher banale Operationen, wie die punktweise definierte Summe zweier Funktionen, aber auch diffizilere, wie die durch punktweise Grenzwertbildung definierte Grenzfunktion einer konvergenten Funktionenfolge. Über die Ubiquität und Nützlichkeit dieser Operationen braucht hier wohl nicht viel gesagt werden und es wirft sich sofort die Frage auf, welche Konvergenz-Eigenschaften von Funktionenfolgen in der komplexen Analysis gute Dienste leisten. Den wichtigen Konvergenzsatz von Weierstraß (Satz 6.1) hätten wir schon in Kapitel 3 besprechen können (und vielleicht auch *sollen*, um schneller mehr Beispielen für holomorphe Funktionen habhaft zu werden). Im Lichte unserer mittlerweile allerdings weit entwickelten Untersuchungen holomorpher Funktionen (siehe Kapitel 5), gelingt uns hier allerdings auch gleich eine umfassendere Untersuchung diverser Eigenschaften, welche unter dem geeigneten Grenzprozess bei Holomorphie erhalten bleiben. Spannende Anwendungen der hier entwickelten Theorie besprechen wir in Kapitel 7 und Kapitel 8. Das hier vorliegende Kapitel orientiert sich sehr stark an [10, Kapitel 8].

### 6.1. Kompakte Konvergenz

Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Wir sagen, dass eine Folge  $(f_n)_n$  holomorpher Funktionen  $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$  **kompakt konvergiert**, falls für jedes kompakte  $K \subseteq U$  die Folge  $(f_n|_K)_n$  gleichmäßig konvergiert. Dies ist offensichtlich äquivalent dazu, dass  $(f_n)_n$  **lokal gleichmäßig** konvergiert, es also um jeden Punkt  $z_0 \in U$  eine offene Umgebung  $V \subseteq U$  gibt, für die  $(f_n|_V)_n$  gleichmäßig konvergiert. Ebenfalls einfach zu sehen ist, dass lokal gleichmäßige Konvergenz (also kompakte Konvergenz) äquivalent dazu ist, **lokal gleichmäßig Cauchy** zu sein.<sup>1</sup>

Die (punktweise definierte) Grenzfunktion einer kompakt konvergenten Folge holomorpher Funktionen ist, da holomorphe Funktionen ja stetig sind, wie aus der *Analysis* bekannt, sicher stetig. Ebenfalls aus der *Analysis* bekannt, ist der *Weierstraßsche Approximationssatz*, der einem erlaubt *jede* stetige Funktion auf  $[0, 1]$  gleichmäßig durch Polynome zu approximieren. Wendet man dies auf bekannte Beispiele von stetigen aber nirgends differenzierbaren Funktionen an (siehe Abbildung 12 auf Seite 44),

---

<sup>1</sup>Man betrachte es als eine Übungsaufgabe zum Stoff der *Analysis 1*, die Definition der hier angesprochenen Konvergenzbegriffe präzise zu formulieren und deren Äquivalenz zu zeigen.

so wird klar, dass sich in der reellen Analysis Differenzierbarkeit überhaupt nicht gut mit gleichmäßiger Konvergenz zu vertragen braucht. Wie gewohnt, beschenkt einen die komplexe Analysis hingegen in ihrer unerschöpflichen Gnädigkeit mit Besserem:

**Satz 6.1** (Konvergenzsatz von Weierstraß). *Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  die Grenzfunktion einer kompakt konvergenten Folge  $(f_n)_n$  holomorpher Funktionen  $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Dann ist  $f$  holomorph.*

*Beweis.* Wir bemühen den Satz von Morera (Satz 3.6) zum Nachweis der Holomorphie von  $f$ . Sei hierzu  $\Delta$  ein (ausgefülltes) Dreieck, welches ganz in  $U$  enthalten ist und der Rand  $\partial\Delta$  geeignet als geschlossener Weg parametrisiert. Dann ist

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit wegen der Holomorphie von  $f_n$  und dem Lemma von Goursat folgt und die Grenzwertvertauschung mit dem Integral dadurch gerechtfertigt ist, dass  $(f_n|_{\partial\Delta})_n$  gleichmäßig konvergiert. (Man beachte, dass  $\partial\Delta$  kompakt ist.) Der Satz von Morera liefert also die Holomorphie von  $f$ .  $\square$

**Proposition 6.2.** *Es sei  $(f_n)_n$  eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen  $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Dann konvergiert auch  $(f'_n)_n$  kompakt.*

*Beweis.* Es sei  $\bar{B}(z_0, 2r)$  eine ganz in  $U$  enthaltene Kreisscheibe und  $K := \bar{B}(z_0, r)$ . Es reicht sicher zu sehen, dass  $(f'_n|_K)_n$  gleichmäßig konvergiert. Ist  $f$  die Grenzfunktion von  $(f_n)_n$ , so ist diese laut Satz 6.1 holomorph. Wir haben darum (siehe Satz 3.2)

$$f'(\zeta) - f'_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, 2r)} \frac{f(z) - f_n(z)}{(z - \zeta)^2} dz$$

für alle  $\zeta \in K$ . Die M-L-Abschätzung (Lemma 2.6) liefert hier

$$|f'(\zeta) - f'_n(\zeta)| \leq \frac{r}{2\pi} \max_{z \in \partial B(z_0, 2r)} \frac{|f(z) - f_n(z)|}{r^2}$$

und dies konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge  $(f_n|_{\partial B(z_0, 2r)})$  gegen Null.  $\square$

**Bemerkung.** Der wichtige Punkt im Beweis von Proposition 6.2 war es,  $K$  mit positivem Abstand zum Rand  $\partial B(z_0, 2r)$  zu wählen, da der (potenzierte) Cauchy-Kern  $(z - \zeta)^{-2}$  für  $z$  und  $\zeta$  nahe bei einander sonst zu groß werden könnte. Selbstverständlich überträgt sich die Konvergenzaussage aus Proposition 6.2 über  $(f'_n)_n$  auch auf die Folgen  $(f_n^{(k)})_n$  höherer Ableitungen. (Man wende Proposition 6.2 induktiv an, oder führe die offensichtlichen Modifikationen im Beweis durch.)

**Satz 6.3** (Blätterzahl der Grenzfunktion). *Es sei  $(f_n)_n$  eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen  $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Außerdem seien  $a \in \mathbb{C}$*

und  $m \in \mathbb{N}$  gegeben und für jedes  $f_n$  sei die mit Vielfachheiten gezählte Anzahl von  $a$ -Stellen von  $f$  höchstens  $m$ :

$$\sum_{z_0 \in f^{-1}(\{a\})} \text{ord}_f(z_0 - a) \stackrel{!}{\leq} m.$$

Dann ist die Anzahl der  $a$ -Stellen der Grenzfunktion  $f$  entweder auch höchstens  $m$  oder  $f$  ist konstant  $a$ .

*Beweis.* Man kann den Satz von Rouché (Satz 5.12) benutzen, um die Annahme, dass  $f$  (mit Vielfachheiten gezählt!) mindestens  $m + 1$  viele  $a$ -Stellen besitzt, zu einem Widerspruch zu führen. Die Details sind Aufgabe 12.1.  $\square$

Injektive holomorphe Funktionen nennt man auch **schlicht** (auch im Englischen, aber dort manchmal auch „univalent“). Aus Satz 6.3 erhält man dann sofort das folgende Ergebnis:

**Korollar 6.4.** *Es sei  $(f_n)_n$  eine kompakt konvergente Folge schlichter Funktionen auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Dann ist die Grenzfunktion  $f$  entweder auch schlicht, oder konstant.*

### Beispiele.

- Die Folge  $(f_n)_n$  mit  $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z/n$ , ist eine Folge ganzer schlichter Funktionen, welche kompakt gegen die Nullfunktion konvergiert.
- Die Folge  $(f_n)_n$  mit  $f_n: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z - (1 - 1/n)$ , konvergiert auf  $\mathbb{D}$  kompakt gegen die Grenzfunktion  $z \mapsto z - 1$ , welche in  $\mathbb{D}$  keine Nullstellen besitzt. Allerdings besitzt jedes  $f_n$  in  $\mathbb{D}$  eine Nullstelle (nämlich bei  $1 - 1/n$ ). Die Anzahl der  $a$ -Stellen in Satz 6.3 kann also abnehmen, indem  $a$ -Stellen der Funktionen in der Folge  $(f_n)_n$  zum Rand des Definitionsbereichs hin „abwandern“.

## 6.2. Der Satz von Montel

Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Eine Familie<sup>2</sup>  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(U)$  heißt **lokal gleichmäßig beschränkt**, falls es um jedem Punkt  $z_0 \in U$  eine Umgebung  $V \subseteq U$  und ein  $C > 0$  gibt, für welche die folgende Abschätzung gilt:

$$\max\{|f(z)| : f \in \mathcal{F}, z \in V\} < C.$$

Analog sagen wir von einer Folge  $(f_n)_n$  holomorpher Funktionen  $f_n \in \mathcal{H}(U)$ , dass diese lokal gleichmäßig beschränkt sei, falls dies für die Familie  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  zutrifft.

Eine Familie  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(U)$  heißt **normal**, falls jede Folge  $(f_n)_n$  in  $\mathcal{F}$  eine kompakt konvergente Teilfolge besitzt.

**Satz 6.5 (Montel).** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Dann ist jede lokal gleichmäßig beschränkte Familie  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(U)$  normal.*

<sup>2</sup>Lies: Teilmenge. Es ist allerdings üblich, hier von „Familien“ zu sprechen.

**Bemerkung.** Eine geeignete Umkehrung des Satzes von Montel gilt auch: jede normale Familie  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(U)$ , die in einem Punkt beschränkt ist, ist notwendigerweise lokal gleichmäßig beschränkt. Man kann den Raum  $\mathcal{H}(U)$  auch mit einer geeigneten Topologie ausstatten (die sogenannte **Kompakt–Offen–Topologie**), bezüglich derer eine Folge  $(f_n)_n$  in  $\mathcal{F}$  genau dann (in dieser Topologie) konvergiert, wenn sie kompakt konvergiert. Der Satz von Montel (+ hier angesprochene Umkehrung) entpuppt sich dann als ein Kriterium für relative Kompaktheit,<sup>3</sup> ist also eng verwandt mit dem Satz von Bolzano–Weierstraß (bzw. Satz von Heine–Borel), der ja besagt, dass eine Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  genau dann relativ kompakt ist, falls diese beschränkt ist. Es ist erwähnenswert, dass die Kompakt–Offen–Topologie in der hiesigen Situation sogar metrisierbar ist; man wähle hierfür eine kompakte Ausschöpfung  $(K_n)_n$  von  $U$  im Sinne von Aufgabe T1.3 und definiere den Abstand  $d(f, g)$  zweier Funktionen  $f, g \in \mathcal{H}(U)$  durch

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}} \quad \text{mit} \quad \|h\|_{K_n} = \max_{z \in K_n} |h(z)|.$$

Dann ist  $d$  eine Metrik auf  $\mathcal{H}(U)$  und stattet  $\mathcal{H}(U)$  also mit einer Topologie aus (sogar mit der Struktur eines vollständigen Fréchet-Raumes, wenn man die  $\mathbb{C}$ -Vektorraumstruktur auf  $\mathcal{H}(U)$  miteinbezieht). Diese stimmt mit der oben angesprochenen (allerdings hier nicht definierten) Kompakt–Offen–Topologie überein.

Zum Beweis von Satz 6.5 bemühen wir ein Lemma:

**Lemma 6.6.** *Es sei  $(f_n)_n$  eine lokal gleichmäßig beschränkte Folge holomorpher Funktionen  $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$  und diese konvergiere (punktweise) auf einer in  $U$  dichten Menge. Dann konvergiert die Folge  $(f_n)_n$  bereits kompakt.*

*Beweis.* Wie zu Beginn dieses Kapitels angemerkt wurde, genügt es zu zeigen, dass  $(f_n)_n$  lokal gleichmäßig Cauchy ist, d.h. wir wollen Folgendes zeigen:

$$\forall z_0 \in U \exists r > 0 \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N \forall \zeta \in B(z_0, r): |f_n(\zeta) - f_m(\zeta)| < \epsilon.$$

Nun zur Sache. Es sei  $z_0 \in U$  fixiert und  $\epsilon > 0$  beliebig. Vermöge lokal gleichmäßiger Beschränktheit, finden wir ein  $r > 0$  so klein, dass die gesamte abgeschlossene Kreisscheibe  $\bar{B}(z_0, 2r)$  in  $U$  enthalten sei und auf dieser  $|f_n|$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) durch ein  $C > 0$  beschränkt bleibt. Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $\zeta, a \in \bar{B}(z_0, r)$  ist dann wegen der

---

<sup>3</sup>Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt bekanntlich **relativ kompakt**, falls ihr topologischer Abschluss kompakt ist.

Cauchyschen Integralformel und der M-L-Abschätzung

$$\begin{aligned}
 |f_n(\zeta) - f_n(a)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B(z_0, 2r)} \left( \frac{f_n(z)}{z - \zeta} - \frac{f_n(z)}{z - a} \right) dz \right| \\
 &= \frac{|a - \zeta|}{2\pi} \left| \int_{\partial B(z_0, 2r)} \frac{f_n(z)}{(z - \zeta)(z - a)} dz \right| \\
 (6.1) \quad &\leq \frac{|a - \zeta|}{2\pi} \cdot 2\pi 2r \cdot \max_{z \in \partial B(z_0, 2r)} \frac{|f_n(z)|}{|z - \zeta||z - a|} \\
 &\leq \frac{|a - \zeta|}{2\pi} \cdot 2\pi 2r \cdot \frac{C}{r^2} = \frac{2C}{r} |a - \zeta|.
 \end{aligned}$$

Da die Menge der Punkte, auf denen  $(f_n)_n$  konvergiert, laut Annahme dicht in  $U$  (insbesondere in  $\bar{B}(z_0, r)$ ) liegt, gibt es endlich viele<sup>4</sup> solche Punkte  $a_1, \dots, a_k \in \bar{B}(z_0, r)$  mit

$$B(z_0, r) \subseteq \bar{B}(z_0, r) \subseteq \bigcup_{\ell=1}^k B\left(a_\ell, \frac{\epsilon}{3} \frac{r}{2C}\right).$$

Wir wählen nun  $N \in \mathbb{N}$  hinreichend groß, sodass

$$|f_n(a_\ell) - f_m(a_\ell)| < \frac{1}{3}\epsilon$$

für alle  $n \geq N$  und alle  $\ell = 1, \dots, k$  gilt. Es sei nun  $\zeta \in B(z_0, r)$  beliebig. Dann gibt es ein  $a \in \{a_1, \dots, a_k\}$  mit  $|\zeta - a| < \frac{\epsilon}{3} \frac{r}{2C}$ . Die Dreiecksungleichung liefert dann

$$\begin{aligned}
 |f_n(\zeta) - f_m(\zeta)| &\leq |f_n(\zeta) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_m(a)| + |f_m(a) - f_m(\zeta)| \\
 &< \frac{2C}{r} |a - \zeta| + \frac{1}{3}\epsilon + \frac{2C}{r} |a - \zeta| < \epsilon
 \end{aligned}$$

für alle  $n, m \geq N$ . □

*Beweis vom Satz 6.5.* Es sei  $(a_n)_n$  eine dichte Folge in  $U$ . (Eine solche erhält man etwa, indem man sich auf die Abzählbarkeit von  $U \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$  beruft.) Wegen der lokal gleichmäßigen Beschränktheit der Familie  $\mathcal{F}$  gibt es eine Folge  $(f_{1,n})_n$  in  $\mathcal{F}$ , die im Punkt  $a_1$  konvergiert. (Hier geht der Satz von Bolzano–Weierstraß ein!) Gleichsam findet man eine Teilfolge  $(f_{2,n})_n$  von  $(f_{1,n})_n$ , die auch in  $a_2$  konvergiert. Induktiv wählt man nun je eine Teilfolge  $(f_{k,n})_n$  von  $(f_{k-1,n})_n$  derart, dass diese auch in  $a_k$  konvergiert.

$$\begin{array}{cccccccc}
 f_{1,\bullet} & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} & \cdots \\
 f_{2,\bullet} & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} & \cdots \\
 f_{3,\bullet} & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} & \cdots \\
 f_{4,\bullet} & f_{4,1} & f_{4,2} & f_{4,3} & f_{4,4} & f_{4,5} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots
 \end{array}$$

<sup>4</sup>Zur Endlichkeit: man wähle zu der offenen Überdeckung  $\bigcup_{a \in \bar{B}(z_0, r)} B\left(a, \frac{\epsilon}{3} \frac{r}{2C}\right) \supseteq \bar{B}(z_0, r)$  vermöge Kompaktheit von  $\bar{B}(z_0, r)$  eine endliche Teilüberdeckung.

Die *Diagonalfolge*  $(f_{n,n})_n$  konvergiert dann allerdings auf der in  $U$  dichten Menge  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  (punktweise) und also (dank Lemma 6.6) überhaupt schon kompakt. Also ist  $\mathcal{F}$  normal.  $\square$

**Bemerkung.** Hinter dem hier geführten Beweis zum Satz von Montel (inklusive Lemma 6.6) verbirgt sich ein allgemeiner Satz aus der Funktionalanalysis, der Satz von Arzelà–Ascoli. Dieser stellt ein Kompaktheitskriterium ein Räumen stetiger Funktionen dar und findet z.B. in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen beim Beweis des Existenzsatzes von Cauchy Anwendung. Eine wichtige Bedingung hierzu ist die sogenannte gleichgradige Stetigkeit der betrachteten Funktionenfolge. Diese haben wir in (6.1) aus der Cauchyschen Integralformel und lokaler Beschränktheit gewonnen. Wir verzichten darauf, weiter auf diesen Satz einzugehen.

**Korollar 6.7** (Satz von Vitali, Häufungspunkt-Kriterium). *Es sei  $(f_n)_n$  eine lokal gleichmäßig beschränkte Folge holomorpher Funktionen  $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$  und diese konvergiere (punktweise) auf einer Menge, welche einen Häufungspunkt in  $U$  besitzt. Dann konvergiert die Folge  $(f_n)_n$  bereits kompakt.*

*Beweis.* Wegen Lemma 6.6 genügt es sicher zu sehen, dass  $(f_n)_n$  punktweise konvergiert. Es sei darum  $z \in U$  fixiert. Es seien  $(f_{n_k})_k$  und  $(f_{m_k})_k$  nun zwei beliebige Teilfolgen von  $(f_n)_n$  derart, dass diese bei  $z$  konvergieren. (Solche Teilfolgen kann man dank des Satzes von Bolzano–Weierstraß sicher wählen zumal  $(f_n(z))_n$  ja beschränkt ist.) Wenn wir

$$(6.2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{m_k}(z)$$

nachweisen können, so folgt, da die Teilfolgen beliebig waren, dass  $(f_n(z))_n$  überhaupt nur einen Häufungspunkt besitzt und darum (man beachte abermals die Beschränktheit von  $(f_n(z))_n$ ) konvergiert.

Der Satz von Montel (Satz 6.5) gewährleistet, dass man Teilfolgen von  $(f_{n_k})_k$  bzw.  $(f_{m_k})_k$  findet, die kompakt konvergieren. Deren Grenzfunktionen seien mit  $f$  und  $g$  bezeichnet. Da nach Voraussetzung die ursprüngliche Folge  $(f_n)_n$  allerdings schon als auf einer Menge mit Häufungspunkt in  $U$  konvergent angenommen war, stimmen  $f$  und  $g$  auf jener Menge überein und dann laut dem Identitätssatz (Satz 3.7) schon auf ganz  $U$ :  $f = g$ . Also gilt (6.2) und es folgt die punktweise Konvergenz von  $(f_n)_n$ .  $\square$

**Korollar 6.8** (Ableitungskriterium). *Es sei  $(f_n)_n$  eine lokal gleichmäßig beschränkte Folge holomorpher Funktionen  $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Ferner sei  $z_0 \in U$  ein Punkt derart, dass für jedes  $k \geq 0$  die Folge  $(f_n^{(k)}(z_0))_n$  konvergiert. Dann konvergiert die Folge  $(f_n)_n$  bereits kompakt.*

*Beweis.* Man kann den Beweis von Korollar 6.7 quasi wörtlich übernehmen. An der Stelle wo wir uns dort auf den Identitätssatz berufen hatten (genauer: die dort behauptete Äquivalenz „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“, benutze man stattdessen „(1) $\Leftrightarrow$ (3)“ angewandt auf den Punkt  $z_0$  aus der Voraussetzung.  $\square$

## KAPITEL 7

### Der Riemannsche Abbildungssatz

In der *linearen Algebra* studiert man Eigenschaften linearer Abbildungen zwischen abstrakt definierten Vektorräumen (vornehmlich von endlicher Dimension). Die generelle Strategie ist hierbei, für eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  zwischen endlich-dimensionalen  $K$ -Vektorräumen, zunächst Basen von  $V$  und  $W$  zu wählen. Diese induzieren  $K$ -Vektorraumisomorphismen  $V \cong K^m$  und  $W \cong K^n$  ( $m = \dim_K V$ ,  $n = \dim_K W$ ) und liefern sodann ein kommutatives Diagramm<sup>1</sup>

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \wr & & \wr \uparrow \\ K^m & \xrightarrow{v \mapsto Av} & K^n \end{array}$$

mit einer geeigneten Matrix  $A \in K^{n \times m}$  (der *Darstellungsmatrix* von  $f$  bezüglich der zuvor gewählten Basen). Das Studium von  $f$  reduziert sich dann auf das Studium der Matrix  $A$  und Fragen über Matrizen lassen sich oft bequem kalkülartig durch Rechnen lösen. Diese Strategie ist sehr effektiv, da man die linearen Abbildungen  $K^m \rightarrow K^n$  sehr *konkret* kennt und darum angemessen gut versteht.

In diesem Kapitel wollen wir uns damit beschäftigen, die obige Strategie auch für die komplexe Analysis brauchbar zu machen. Zu gegebener holomorpher Funktion  $f: U \rightarrow G$  zwischen Gebieten  $U, G \subseteq \mathbb{C}$  wollen wir also biholomorphe<sup>2</sup> Abbildungen  $U \cong D$  und  $G \cong E$  finden und hoffen dann das Abbildungsverhalten von  $f$  durch Betrachtung der unteren Abbildung in dem folgenden kommutativen Diagramm zu verstehen:<sup>3</sup>

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & G \\ \downarrow \wr & & \wr \uparrow \\ D & \dashrightarrow & E. \end{array}$$

<sup>1</sup>Alle hier auftretenden Pfeile sind natürlich  $K$ -lineare Abbildungen.

<sup>2</sup>Manche Autoren sprechen hier auch von „*konformen Abbildungen von  $U$  auf  $D$* “ (man beachte das Wort „*auf*“, welches auf Surjektivität hinweist) und verstehen dann unter „*konform*“ eine schlichte Abbildung. Das kann allerdings zu Verwirrung führen, da z.B. die Exponentialfunktion eine auf  $\mathbb{C}$  nirgends verschwindende Ableitung hat (also *konform* im Sinne von § 1.3 ist), aber selbst nicht schlicht ist. Wir ziehen hier also die Benutzung des Begriffes „*biholomorph*“ vor.

<sup>3</sup>Alle hier auftretenden Pfeile sind natürlich holomorphe Funktionen.

(Den gestrichelten horizontalen Pfeil bekommt man durch Umkehrung der Isomorphismen und Verkettung in offensichtlicher Art.) Diese Überlegung reduziert dann das Studium von  $f$  auf das Studium der holomorphen Funktionen  $D \rightarrow E$ .

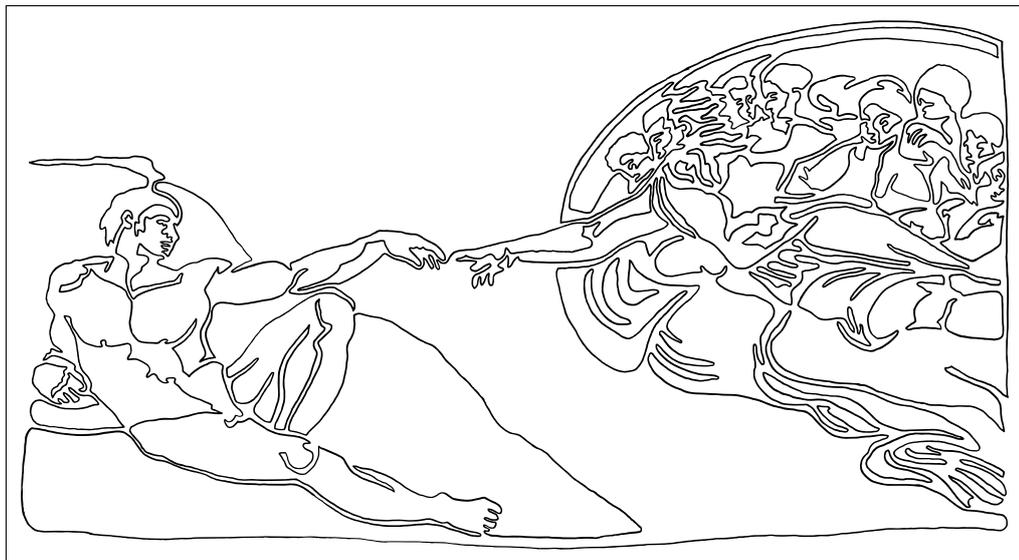
### 7.1. Der Satz und einordnende Besprechung

Der folgende phänomenale Satz proklamiert, dass man, wenn  $U$  und  $G$  einfach zusammenhängend sind,  $D$  und  $E$  in der obigen Überlegung stets als die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D} = B(0, 1)$  wählen kann!

**Satz 7.1** (Riemannscher Abbildungssatz). *Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein nichtleeres, einfach zusammenhängendes Gebiet, welches nicht gleich  $\mathbb{C}$  ist. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (1) *Es gibt eine biholomorphe Abbildung  $\phi: U \rightarrow \mathbb{D}$ .*
- (2) *Für jeden beliebig gewählten Punkt  $z_0 \in U$  kann man überdies ein biholomorphes  $\phi: U \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $\phi(z_0) = 0$  und  $\phi'(z_0) \in \mathbb{R}_+$  finden und jenes  $\phi$  ist eindeutig bestimmt.*

Man beachte, dass die symmetrische Gestalt von  $\mathbb{D}$  es besonders bequem macht, die holomorphen Funktionen  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  zu studieren. Wir erinnern zur Substanziierung dieser Behauptung etwa an das Lemma von Schwarz–Pick aus Aufgabe 6.1 oder die Tatsache, dass in Aufgabe 13.1 (a) *alle* biholomorphen Selbstabbildungen von  $\mathbb{D}$  *explizit* als gewisse Möbius-Transformationen bestimmt werden.



**Abbildung 33.** Ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Gemäß des Riemannschen Abbildungssatzes (Satz 7.1) lässt sich dieses konform auf die Einheitskreisscheibe abbilden. (Zeichnung von Christina Ostwald; adaptiert nach dem Deckenfresko „Die Erschaffung Adams“ von Michelangelo in der Sixtinischen Kapelle.)

**Bemerkungen 7.2.**

- (1) Offensichtlich lässt sich keine biholomorphe Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  finden, da eine solche (als beschränkte ganze Funktion) ja laut dem Satz von Liouville (Satz 3.5) konstant wäre und somit doch nicht biholomorph sein kann.
- (2) Da jeder Biholomorphismus natürlich ein Homöomorphismus ist, impliziert der Riemannsche Abbildungssatz insbesondere, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$  homöomorph zur Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$  ist. (Es ist nicht unmittelbar klar, wie man zu dieser Erkenntnis gelangen würde, ohne von komplexer Analysis Gebrauch zu machen.) Umgekehrt überlegt man sich auch leicht, dass Homöomorphismen den einfachen Zusammenhang erhalten. Ist  $\mathbb{D}$  also homöomorph zu einer offenen Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{C}$ , so ist  $U$  automatisch ein einfach zusammenhängendes Gebiet und damit sogar biholomorph auf  $\mathbb{D}$  abbildbar sofern  $U$  nicht ganz  $\mathbb{C}$  ist.
- (3) Es läge freilich auch nahe, eine Version des Riemannschen Abbildungssatzes für nicht einfach zusammenhängende Gebiete zu besprechen, jedoch ist die Theorie hierzu deutlich komplizierter und würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.
- (4) Der noch zu führende Beweis von Satz 7.1 gibt keinen Aufschluss darauf, die eine biholomorphe Funktion  $U \rightarrow \mathbb{D}$  zu finden sei. Für geometrisch sehr einfache Gebiete kann man manchmal noch sehr überschaubar aussehende Formeln für derartige Funktionen hinschreiben (siehe etwa Aufgabe 13.2 und Aufgabe 13.3), aber im allgemeinen Fall funktioniert dies nicht mehr. Für gewisse Anwendungen genügt es auch, das Gebiet, für welches man sich interessiert, durch ein konvexes Polygon zu approximieren und nach einer biholomorphen Abbildung des fraglichen Polygons auf  $\mathbb{D}$  zu suchen. (Letzteres ist jedenfalls numerisch mittlerweile ausreichend verstanden.)
- (5) Über der Verhalten von biholomorphen Funktionen bei Annäherung an Punkte auf dem Rand ihres Definitionsbereiches gibt es viel zu sagen. Es stellen sich die offensichtlichen Fortsetzbarkeitsfragen. Einen kleinen Vorgeschmack gibt Aufgabe 13.4, aber für mehr fehlt in dieser Vorlesung die Zeit.

Durch Betrachtung von  $\phi^{-1}$  in Satz 7.1 sieht man, dass sich  $\mathbb{D}$  biholomorph auf alle einfach zusammenhängenden Gebiete abgebildet werden kann. Man führt hierzu noch gerne zwei Normierungsbedingungen ein, nämlich, dass 0 auf 0 abgebildet wird (das lässt sich durch eine Verschiebung des Bildgebietes erreichen) und die Ableitung von  $\psi = \phi^{-1}$  bei 0 gleich 1 sei (das lässt sich durch eine Skalierung und Drehung des Bildgebietes erreichen). Dann definiert man<sup>4</sup> die **Klasse**  $\mathcal{S}$  durch

$$\mathcal{S} := \{\text{schlichte Funktionen } \psi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \psi(0) = 0 \text{ und } \psi'(0) = 1\}.$$

---

<sup>4</sup>Das Wort „Klasse“ sollte man hier als „Menge“ lesen. Diese altertümlich wirkende Bezeichnung ist dem Alter der hier betrachteten Thematik geschuldet und hat sich bis heute nicht abgeschliffen.

Diese liefert gewissermaßen eine analytische Sicht auf alle<sup>5</sup> einfach zusammenhängenden Gebiete. Die nach Paul Koebe benannte **Koebe-Funktion**

$$k: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \dots$$

ist ein Element von  $\mathcal{S}$ . Sie bildet die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$  biholomorph auf das Schlitzgebiet  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$  ab (siehe Abbildung 34).<sup>6</sup> Ist

$$z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$$

die Potenzreihenentwicklung einer Funktion aus der Klasse  $\mathcal{S}$ , so bewies Ludwig Bieberbach [4] in 1916 die Ungleichung<sup>7</sup>  $|a_2| \leq 2$  und mutmaßte, dass vielleicht schon allgemein  $|a_n| \leq n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) gelten müsste. Diese sogenannte **Bieberbachsche Vermutung** wurde erst 1985 von Louis de Branges bewiesen [5].

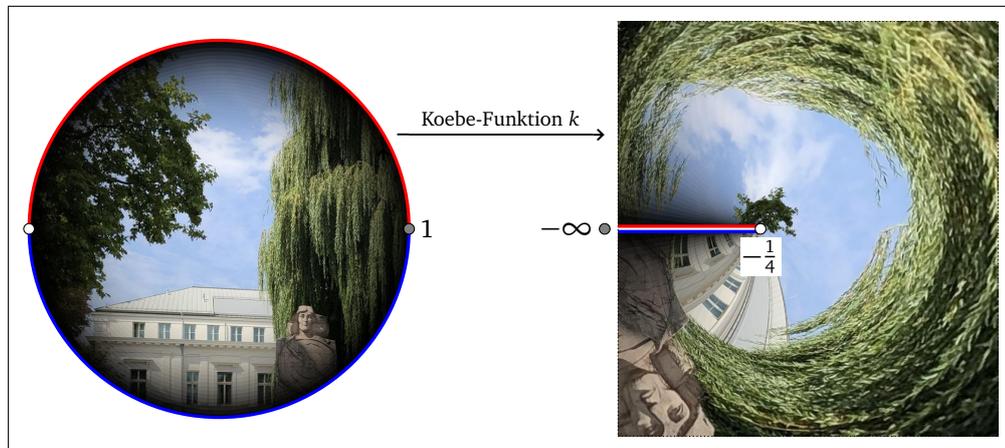


Abbildung 34. Abbildungsverhalten der Koebe-Funktion  $k$ .

## 7.2. Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes

Im ganzen hier vorliegenden Abschnitt bezeichne  $U \subset \mathbb{C}$  ein fest gewähltes, einfach zusammenhängendes Gebiet, welches nicht gleich  $\mathbb{C}$  ist und  $z_0 \in U$  sei beliebig, aber ebenfalls fixiert (insbesondere ist  $U \neq \emptyset$ ). Wir betrachten dann die Menge

$$(7.1) \quad \mathcal{F} = \{\text{schlichte Funktionen } \phi: U \rightarrow \mathbb{D} \text{ mit } \phi(z_0) = 0\}.$$

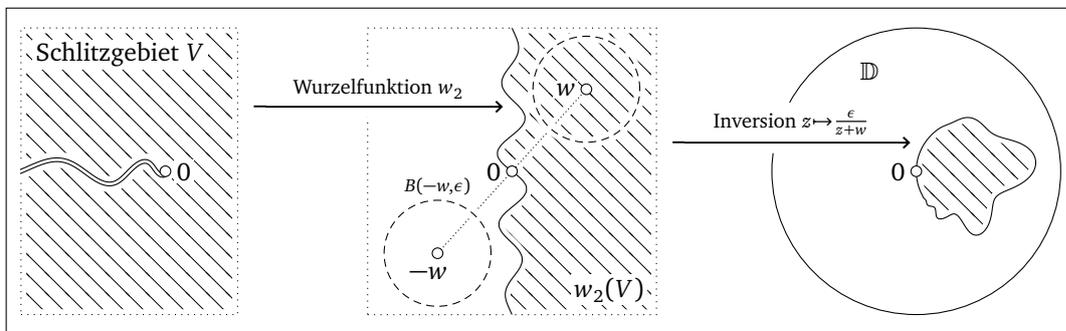
<sup>5</sup>Unter Beachtung der oben angesprochenen Normierungen: Verschiebung, Skalierung und Drehung.

<sup>6</sup>Dass dies so ist, kann man sich sehr einfach überlegen, wenn man Aufgabe 13.2 (b) gelöst hat und mit der Lösung davon probiert, eine biholomorphe Abbildung  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$  zu bauen.

<sup>7</sup>Die Extremalfunktionen in  $\mathcal{S}$ , welcher hier Gleichheit realisieren sind genau die Koebe-Funktion  $k$  und ihre **Rotationen**  $z \mapsto \xi^{-1} k(\xi z)$  mit  $\xi \in \partial \mathbb{D}$ . (Der vielleicht ungewöhnlich wirkende Vorfaktor  $\xi^{-1}$  ist hier notwendig, um die Normierung der Ableitung im Nullpunkt wiederherzustellen.)

**Lemma 7.3.** Die in (7.1) definierte Menge  $\mathcal{F}$  ist nicht leer.

*Beweis.* Es gilt eine schlichte Funktion  $\phi: U \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $\phi(z_0) = 0$  zu konstruieren. Zur Motivation der Beweisidee sei zunächst davon ausgegangen, dass  $U$  eine Umgebung von 0 nicht enthält. Dann bildet die Inversion  $z \mapsto 1/z$  das Gebiet  $U$  schlicht auf ein beschränktes Gebiet ab und durch Skalierung lässt sich erreichen, dass dieses in  $\mathbb{D}$  enthalten ist. Durch Voranstellung einer Verschiebung lässt sich ganz analog schließen, wenn das Komplement von  $U$  irgendeinen inneren Punkt enthält. Problematisch sind demnach höchstens solche Gebiete  $U$ , deren Komplement keine inneren Punkte enthält? Man sollte sich solche Gebiete als „Schlitzgebiete“ vorstellen (siehe Abbildung 35). Es stellt sich die Frage, ob man auch solche Gebiete stets schlicht auf ein Gebiet abbilden kann, dessen Komplement eben doch einen inneren Punkt enthält. Dieser Aufgabe stellen wir uns nun; wir werden sie mittels der Existenz holomorpher Wurzeln lösen können.



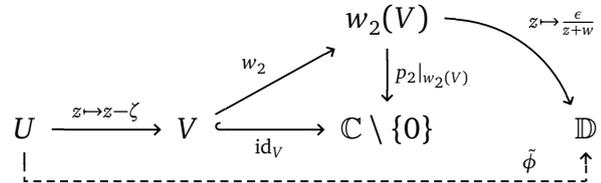
**Abbildung 35.** Zum Beweis von Lemma 7.3: Ein einfach zusammenhängendes Schlitzgebiet  $V$  wird durch eine Wurzelfunktion  $w_2$  „aufgeklappt“. Im Komplement des zugehörigen Bildgebiet findet man dann einen inneren Punkt  $-w$  und durch Inversion und Skalierung lässt sich dann schlicht auf ein in der Einheitskreisscheibe enthaltenes Gebiet abbilden.

Wegen  $U \neq \mathbb{C}$  gibt es eine komplexe Zahl  $\zeta$ , die nicht in  $U$  enthalten ist. Wir setzen  $V := U - \zeta$ . Durch Anwendung von Korollar 4.11 (Existenz holomorpher Wurzeln) erhalten wir nun die Abbildung  $w_2$  im folgenden kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\
 & \nearrow w_2 & \downarrow p_2: z \mapsto z^2 \\
 U & \xrightarrow{z \mapsto z - \zeta} & V \xrightarrow{\text{id}_V} \mathbb{C} \setminus \{0\}.
 \end{array}$$

Wir wählen nun einen beliebigen Punkt  $w \in w_2(V)$ . Laut dem Satz von der Gebietstreue (Satz 3.12) ist  $w_2(V)$  offen. Es gibt also eine offene Kreisscheibe  $B(w, 2\epsilon)$  um  $w$ , die ganz in  $w_2(V)$  enthalten ist.

Da  $\text{id}_V = p_2 \circ w_2$  injektiv ist, ist auch schon  $w_2$  injektiv. Wegen  $p_2(z) = p_2(-z)$  muss dann aber  $-B(w, \epsilon) = B(-w, \epsilon)$  disjunkt zu  $w_2(V)$  sein. Die durch Verkettung der offensichtlichen Funktion im folgenden Diagramm erhaltene Funktion  $\tilde{\phi}: U \rightarrow \mathbb{D}$  ist (als Verkettung schlichter Funktionen) sicher schlicht:

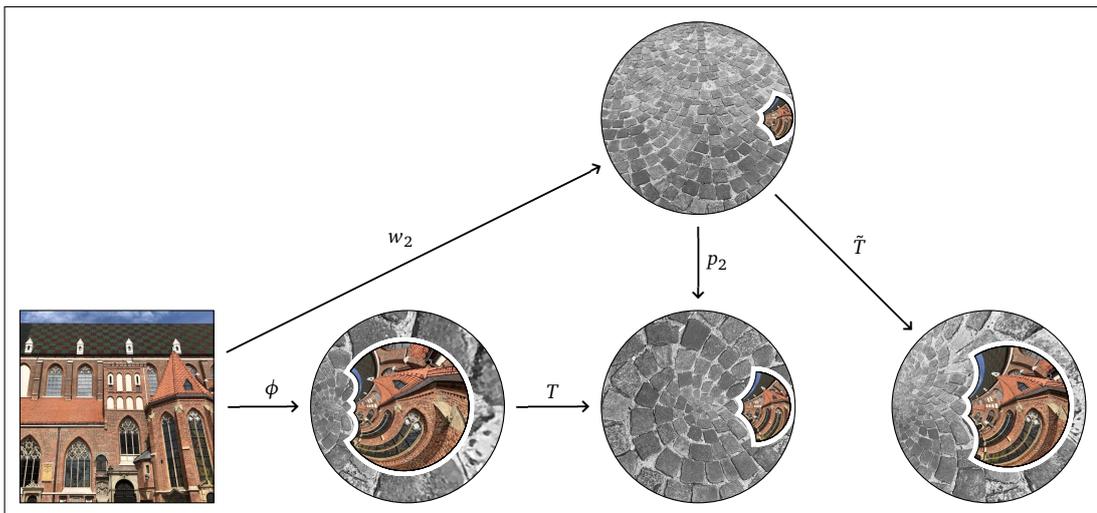


Durch Verkettung von  $\tilde{\phi}$  mit der biholomorphen Abbildung (siehe Aufgabe 6.1)

$$\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad w \mapsto \frac{w - \tilde{\phi}(z_0)}{1 - \overline{\tilde{\phi}(z_0)}w}$$

gewinnt man eine schlichte Funktion  $\phi: U \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $\phi(z_0) = 0$ . □

**Lemma 7.4.** Für die in (7.1) definierte Menge  $\mathcal{F}$  gilt: bildet  $\phi \in \mathcal{F}$  nicht surjektiv auf  $\mathbb{D}$  ab, so gibt es ein  $\Phi \in \mathcal{F}$  mit  $|\Phi'(z_0)| > |\phi'(z_0)|$ .



**Abbildung 36.** Illustration zum Beweis von Lemma 7.4. Dass sich hier die Ableitung bei dem Punkt  $z_0$ , welcher von  $\phi$  auf 0 abgebildet wird, vergrößert hat, also  $|(\tilde{T} \circ w_2)'(z_0)| > |\phi'(z_0)|$  gilt, ist vielleicht nur mit geschultem Auge ersichtlich.

*Beweis.* Es sei  $\phi$  ein Element der in (7.1) definierten Menge  $\mathcal{F}$ . Ferner sei  $\phi$  nicht surjektiv und  $\eta \in \mathbb{D} \setminus \phi(U)$  beliebig. Wir betrachten die biholomorphe Abbildung  $T: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, w \mapsto \frac{w-\eta}{1-\bar{\eta}w}$  (siehe Aufgabe 6.1). Dann ist  $T \circ \phi: U \rightarrow \mathbb{D}$  eine nullstellenfreie

holomorphe Abbildung auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet  $U$  und besitzt damit eine holomorphe Quadratwurzel:

$$(7.2) \quad \begin{array}{ccccc} & & & \mathbb{D} & \\ & & & \uparrow & \\ & & & p_2: z \mapsto z^2 & \\ & & & \downarrow & \\ U & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{D} & \xrightarrow{T} & \mathbb{D}. \\ & & \nearrow w_2 & & \end{array}$$

(Eine solche Abbildung bekommt man leicht mittels eines durch Aufgabe 9.4 beschafften holomorphen Logarithmus von  $T \circ \phi$  und dem Argument aus dem Beweis von Korollar 4.11.) Da  $p_2 \circ w_2 = T \circ \phi$  schlicht ist, muss auch  $w_2$  schlicht sein. Die schlichte Funktion  $w_2: U \rightarrow \mathbb{D}$  muss zwar  $z_0$  nicht auf 0 abbilden, aber durch Verschaltung mit der Möbiustransformation

$$\tilde{T}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto \frac{z - w_2(z_0)}{1 - \overline{w_2(z_0)}z},$$

lässt sich dies doch erreichen. Also ist  $\Phi := (\tilde{T} \circ w_2) \in \mathcal{F}$ . Mit der Kettenregel und dem Satz über die Ableitung inverser Funktionen (siehe (7.2)) erhält man

$$\Phi'(z_0) = \tilde{T}'(w_2(z_0))w_2'(z_0) = \tilde{T}'(w_2(z_0)) \frac{T'(\phi(z_0))\phi'(z_0)}{p_2'(w_2(z_0))}.$$

Durch Berechnung der Ableitungen der auftretenden Möbiustransformationen folgt dann weiter

$$\begin{aligned} \Phi'(z_0) &= \frac{1 - |w_2(z_0)|^2}{(1 - \overline{w_2(z_0)}w_2(z_0))^2} \frac{1 - |\eta|^2}{(1 - \bar{\eta}\phi(z_0))^2} \frac{\phi'(z_0)}{p_2'(w_2(z_0))} \\ &= \frac{1 - |\eta|^2}{1 - |(T \circ \phi)(z_0)|} \frac{\phi'(z_0)}{2w_2(z_0)} = \frac{1 + |\eta|}{2w_2(z_0)} \phi'(z_0). \end{aligned}$$

Also ist

$$|\Phi'(z_0)| = \frac{1 + |\eta|}{2\sqrt{|w_2(z_0)|^2}} |\phi'(z_0)| = \frac{1 + |\eta|}{2\sqrt{|\eta|}} |\phi'(z_0)| > |\phi'(z_0)|. \quad \square$$

*Beweis von Satz 7.1.* Wir beweisen lediglich die Teilaussage (1); Teil (2) ist Aufgabe 13.1 (b). Da  $U$  offen ist, gibt es eine Kreisscheibe  $B(z_0, 2\epsilon)$ , die ganz in  $U$  enthalten ist. Für jedes  $\phi \in \mathcal{F}$  folgt dann mit der Cauchyschen Integralformel (siehe Satz 3.2) und der M-L-Abschätzung

$$|\phi'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \epsilon)} \frac{\phi(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi\epsilon \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon}.$$

Da  $\mathcal{F}$  dank Lemma 7.3 nicht leer ist, ergibt sich aus der obigen Überlegung die (eigentliche) Existenz des Supremums

$$s_0 := \sup\{|\phi'(z_0)| : \phi \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Wir wählen nun eine Folge  $(\phi_n)_n$  in  $\mathcal{F}$  für die  $|\phi'_n(z_0)|$  gegen  $s_0$  konvergiert. Da jede Funktion  $\phi_n$  nur Werte in der (beschränkten!) Menge  $\mathbb{D}$  annimmt, ist  $(\phi_n)_n$  (lokal) gleichmäßig beschränkt und der Satz von Montel (Satz 6.5) liefert die Existenz einer kompakt konvergenten Teilfolge mit Grenzfunktion  $\phi$ . (Wegen dem Konvergenzsatz von Weierstraß, Satz 6.1, ist  $\phi$  natürlich holomorph.) Da wegen Proposition 6.2 die Folge der Ableitungen gegen  $\phi$  konvergiert, gilt  $|\phi'(z_0)| = s_0$ . Da  $\phi$  also nicht konstant sein kann, liefert Korollar 6.4, dass  $\phi$  (als Grenzwert einer kompakt konvergenten Folge schlichter Funktionen) selbst schlicht ist. Überdies ergibt sich natürlich auch, dass  $\phi$  höchstens auf Punkte in  $\overline{\mathbb{D}}$  abbilden kann. Das Offenheitsprinzip (Satz 3.12) liefert dann allerdings sogar  $\phi(U) \subseteq \mathbb{D}$ . Also ist  $\phi \in \mathcal{F}$ . Mit Lemma 7.4 folgt nun aber sogar  $\phi(U) = \mathbb{D}$  und wir sind fertig.  $\square$

**Bemerkung.** Man beachte die Funktionsweise des hier geführten Beweises von Satz 7.1: zunächst überlegt man sich, dass man  $U$  überhaupt schlicht auf eine offene Teilmenge von  $\mathbb{D}$  abbilden kann und dann versucht man eine dertige Abbildung zu finden, deren Bildgebiet möglichst groß ist (in der Hoffnung, dass jenes Bildgebiet dann automatisch gleich  $\mathbb{D}$  ist). Hierbei fungiert  $|\phi'(z_0)|$  als Maßzahl für die Größe des Bildgebietes  $\phi(U)$ ; dies kann man sich so plausibel machen, dass  $\phi$  lokal bei  $z_0$  eine „infinitesimale Kreisscheibe“ auf eine um einen Faktor  $|\phi'(z_0)|$  gestreckte „infinitesimale Kreisscheibe“ um den Nullpunkt abbildet. Dass ein Maximieren von  $|\phi'(z_0)|$  für  $\phi \in \mathcal{F}$  genau die surjektiv auf  $\mathbb{D}$  abbildenden  $\phi$  auswählt, ist Aussage von Lemma 7.4.

## Interpolationsprobleme

In diesem letzten Kapitel untersuchen wir die Null- und Polstellenverteilung meromorpher Funktionen auf  $\mathbb{C}$ . Es sei  $f$  eine auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$  holomorphe Funktion (die Polstellen von  $f$  mögen auch in  $U$  liegen;  $U$  ist also streng genommen *nicht* der Definitionsbereich von  $f$ ). Wir wissen bereits, dass sich die Nullstellen von  $f$  nicht in einem Punkt auf deren Definitionsbereich häufen können (siehe Satz 3.7), ja auch nicht zu den Polstellen hin (denn dort strebt der Betrag von  $f$  gegen  $+\infty$ ). Dass sich die Polstellen von  $f$  nicht in  $U$  häufen ist Teil der Definition von „meromorph“. Wir werden sehen, dass dies für  $U = \mathbb{C}$  die einzigen Einschränkungen sind, denen die Null- und Polstellenverteilung von  $f$  unterworfen ist. Analoge Aussagen gelten auch für beliebige andere Gebiete und lassen sich im Wesentlichen mit denselben Methoden beweisen. (Die Situation ist dann aber trotzdem etwas subtiler. Für die Details sei auf [3, Kapitel III, §§ 7–8] verwiesen. In [17] findet man auch die allgemeinen Resultate, dafür allerdings mit Beweisen, die mehr auf hier nicht entwickelte Theorie zurückgreifen.)

### 8.1. Der Satz von Mittag-Leffler

**Satz 8.1** (Satz von Mittag-Leffler für  $\mathbb{C}$ ). *Es sei  $(a_n)_n$  eine (endliche oder unendliche) Folge paarweise verschiedener Punkte in  $\mathbb{C}$ , die keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$  hat. Für jedes  $n$  sei ein Polynom  $P_n$  positiven Grades mit verschwindendem konstanten Term gegeben. Dann gibt es eine auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion  $f$ , die genau in den Punkten  $a_n$  Polstellen besitzt und dort als Hauptteil ihrer Laurententwicklung<sup>1</sup> gerade  $z \mapsto P_n(1/(z - a_n))$  hat.*

Wir probieren den Beweis des obigen Satzes zu motivieren, indem wir den Fall  $a_n = -n$  und  $P_n = Z \in \mathbb{C}[Z]$  betrachten. Dann läge es nahe,

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} P_n(1/(z - a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z + n}$$

---

<sup>1</sup>Mit Blick auf Aufgabe 7.2 stellt man fest, dass diese Sprechweise nicht ganz präzise ist; gemeint ist die Laurententwicklung um einen kleinen punktierten Kreissektor um  $a_n$ , welche sonst keine anderen Punkte der Folge  $(a_m)_m$  enthält.

zu setzen. Das Problem hier ist: die obige Reihe konvergiert für kein  $z$ ! Um dies zu beheben, schreiben wir

$$\frac{1}{z+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^{k+1}} z^k = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} z + \frac{1}{n^3} z^2 \mp \dots$$

und betrachten dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-z}{n(z+n)}.$$

Von dieser Reihe sieht man leicht, dass sie (d.h. ihre Partialsummenfolge) auf  $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$  kompakt konvergiert. Die Reihe stellt also eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  dar, hat Pole genau in den negativen ganzen Zahlen und die Hauptteile der dortigen Laurententwicklungen sind genau  $1/(z+n)$ .

*Beweis von Satz 8.1.* Wir dürfen den Beweis unter der Annahme führen, dass keines der Folgenglieder  $a_n$  verschwindet, da man zum Schluss ja immer noch einen Term  $P_m(1/z)$  addieren kann. Außerdem dürfen wir davon ausgehen, dass  $(a_n)_n$  eine unendliche Folge ist (ansonsten wähle  $f$  einfach als die (endliche!) Summe der gewünschten Hauptteile). Die Funktion  $z \mapsto P_n(1/(z-a_n))$  ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}$ . Ihre Potenzreihenentwicklung konvergiert daher gleichmäßig auf der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\bar{B}(0, |a_n|/2)$  und wir finden darum ein Polynom  $T_n \in \mathbb{C}[Z]$  mit

$$(8.1) \quad \max_{|z| \leq |a_n|/2} |P_n(1/(z-a_n)) - T_n(z)| < 2^{-n}.$$

Wie in unserer Vorüberlegung sieht man nun, dass die (Partialsummenfolge der) Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (P_n(1/(z-a_n)) - T_n(z))$$

auf  $\mathbb{C} \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  kompakt konvergiert; die Reihe stiftet dort nach dem Konvergenzatz von Weierstraß (Satz 6.1) also eine holomorphe Funktion. Zum Beweis der kompakten Konvergenz beachte man, dass offensichtlich  $|a_n| \rightarrow \infty$  gilt. Es gibt also zu jeder beschränkten Teilmenge  $K$  von  $\mathbb{C} \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  *a-priori* höchstens endlich viele Indizes  $n$  mit  $K \not\subseteq \bar{B}(0, |a_n|/2)$ . Ist also  $N$  hinreichend groß (abhängig von  $K$ ), so greift (8.1) für alle  $n \geq N$  und wir erhalten

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} (P_n(1/(z-a_n)) - T_n(z)) \right| < \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} = 2^{1-N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Da nun aber für jedes fixierte  $n$  auch

$$F_n(z) = T_n(z) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} (P_m(1/(z-a_m)) - T_m(z))$$

in einer Umgebung von  $a_n$  holomorph ist, folgt wegen  $f(z) - F_n(z) = P_n(1/(z-a_n))$ , dass  $f$  in  $a_n$  eine Laurententwicklung mit Hauptteil  $P_n(1/(z-a_n))$  besitzt.  $\square$

**Bemerkung.** Man kann die obige Beweisidee auch für beliebige Gebiete  $U \subseteq \mathbb{C}$  und beliebige Folgen  $(a_n)_n$  ohne Häufungspunkte in  $U$  zum Ziel führen. Dann muss man aber vorsichtiger sein, wenn  $(a_n)_n$  sich bei Randpunkten von  $U$  häuft. Die Idee ist es dann, die Rolle des Mittelpunktes 0 in den obigen Kreisscheiben  $\overline{B}(0, |a_n|/2)$  durch einen Randpunkt von  $U$  (anhängig von  $a_n$ ) spielen zu lassen. Weiteren wesentlich anderen Ideen bedarf es dann nicht, aber die Durchführung ist dennoch etwas technisch. Wir verweisen auf [3, Kapitel III, § 7] für die Details.

Man kann sich fragen, ob man auch meromorphe Funktionen auf  $\mathbb{C}$  (oder einem anderen Gebiet) mit *überabzählbar vielen* Polstellen konstruieren kann. Das geht allerdings auf Grund topologischer Einschränkungen nicht:

**Proposition 8.2.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $\mathcal{A} \subseteq U$  eine überabzählbare Menge von Punkten in  $U$ . Dann besitzt  $\mathcal{A}$  einen Häufungspunkt in  $U$ .*

*Beweis.* Wir zeigen: ist  $\mathcal{A} \subseteq U$  eine Menge ohne Häufungspunkt in  $U$ , so ist  $\mathcal{A}$  höchstens abzählbar. Hierzu wähle eine kompakte Ausschöpfung  $(K_n)_n$  von  $U$  im Sinne von Aufgabe T1.3. Dann enthält jedes  $K_n$  höchstens endlich viele Punkte von  $\mathcal{A}$ . Man erhält nun eine Abzählung von  $\mathcal{A}$  wie folgt: erst durchlaufe alle Punkte von  $\mathcal{A} \cap K_1$  in irgendeiner Reihenfolge, dann tue dies mit  $\mathcal{A} \cap K_{n+1} \setminus K_n$  für  $n = 1, 2, \dots$ ; wegen  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U$  erreicht man damit auch jeden Punkt von  $\mathcal{A}$ .  $\square$

## 8.2. Partialbruchzerlegung

Der Beweis des Satzes von Mittag-Leffler (Satz 8.1) liefert sogar eine Methode, um sich meromorphe Funktionen mit vorgegebenen Polstellen zu beschaffen. Beispielsweise für doppelte Pole in allen ganzen Zahlen:

$$f(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

(Hier hat man bereits absolute und kompakte Konvergenz, ganz ohne die *konvergenzverbessernden Summanden*  $T_n$  aus dem Beweis von Satz 8.1 heranziehen zu müssen.)

Allerdings kennt man noch eine auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion mit doppelten Polen in den ganzen Zahlen, nämlich

$$z \mapsto \frac{1}{\sin(\pi z)^2}.$$

Multipliziert man noch mit einem Faktor  $\pi^2$ , so kann man sich sogar überlegen, dass die zugehörigen Hauptteile der Laurentreihen der obigen Funktion und  $f$  in Kreisscheiben  $B(n, 1)$  übereinstimmen. Es stellt sich daher die naheliegende Frage, die auf  $\mathbb{C}$  holomorphe(!) Funktion

$$z_0 \mapsto \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \left( \frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} - f(z) \right)$$

zu bestimmen.

**Satz 8.3.** Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  ist  $\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ .

*Beweis.* Es bezeichne  $h(z)$  die holomorphe Fortsetzung (auf  $\mathbb{C}$ ) der Differenz beider Seiten. Dabei handelt es sich offensichtlich um eine 1-periodische Funktion. Für  $z = x + iy$  ist

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) = \frac{1}{2i}(\exp(ix)\exp(-y) - \exp(-ix)\exp(y)).$$

Für  $|y| \geq 1$  ist darum

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{|\sin(\pi(x+iy))^2|} &= \frac{2\pi^2}{|\exp(i\pi x)\exp(-\pi y) - \exp(-i\pi x)\exp(\pi y)|^2} \\ &\leq \frac{2\pi^2}{|\exp(\pi|y|) - \exp(-\pi|y|)|^2} \xrightarrow{|y| \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Andererseits ist aber auch für  $|y| \geq 1$

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+iy-n)^2} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2 + y^2}.$$

Dies konvergiert für  $|y| \rightarrow \infty$  aber offensichtlich auch gegen 0. (Die Reihe über  $|n| \geq N$  lässt sich durch geeignete Wahl von  $N$  (unabhängig von  $y$ !) beliebig klein machen und die endlich vielen übrigen Terme zu  $|n| < N$  konvergieren für  $|y| \rightarrow \infty$  gegen Null.) Also ist  $h$  auf  $\{x+iy : x \in [0, 1], |y| \geq 1\}$  beschränkt, wegen der Kompaktheit von  $\{x+iy : x \in [0, 1], |y| \leq 1\}$  sogar auf  $\{x+iy : x \in [0, 1]\}$  und wegen 1-Periodizität schließlich auf  $\mathbb{C}$ . Der Satz von Liouville (Satz 3.5) zeigt, dass  $h$  konstant ist. Wegen  $h(iy) \rightarrow 0$  für  $|y| \rightarrow \infty$  ist dann aber  $h$  konstant Null. Das war zu zeigen.  $\square$

Formeln wie die in Satz 8.3 bezeichnet man wegen ihrer Ähnlichkeit zur Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen oft auch als **Partialbruchzerlegung**.

**Korollar 8.4.**  $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$

*Beweis.* Das folgt durch Einsetzen von  $z = 1/2$  in Satz 8.3 nach Zusammenfassen einiger Summanden:

$$\frac{\pi^2}{1^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1/2-n)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(-1/2-m)^2} + \frac{1}{(1/2+m)^2} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{(2m+1)^2}. \quad \square$$

Als weitere Anwendung der obigen Partialbruchzerlegung (Satz 8.3) zeigen wir die folgende Partialbruchzerlegung des Kotangens.

**Satz 8.5.** Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  ist  $\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$ .

*Beweisskizze.* Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert kompakt auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  (Nachrechnen, wie im Beweis von Satz 8.3); ihre Ableitung ist

$$-\frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n^2 + z^2)}{(z^2 - n^2)^2} = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2} = -\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} = \frac{d}{dz} \pi \cot(\pi z).$$

Die Differenz der beiden Seiten der im Satz behaupteten Gleichung ist also konstant. Da beide Seiten aber für Argumente  $z = x + iy$  mit  $|y| \rightarrow \infty$  gegen Null konvergieren (nachrechnen!), muss diese Konstante gleich Null sein.  $\square$

Einen Hinweis auf die Nützlichkeit von Satz 8.5 liefert Aufgabe 10.3, obgleich die Formel in Satz 8.5 streng genommen nicht direkt für die genannte Aufgabe benötigt wird.

**Bemerkung.** Die Formel in Satz 8.5 kann man etwas symmetrischer in der Form

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{z + n} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z - n}$$

schreiben. Man möchte den letzten Ausdruck vielleicht als unendliche Reihe

$$” \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - n} “$$

schreiben, sollte hier allerdings beachten, dass es sich hierbei nur um eine *bedingt konvergente* Reihe handelt und deren Wert mittels symmetrisch summierter Partialsummen zu bestimmen ist (siehe obigen Limes).

### 8.3. Unendliche Produkte

Als nächstes Ziel fassen wir es in Auge, ein Analogon zum Satz von Mittag-Leffler (Satz 8.1) für die Verteilung von **Nullstellen** holomorpher Funktionen zu beweisen. (Dies könnte man auch für allgemeine Gebiete tun, allerdings beschränken wir uns hier der Bequemlichkeit wegen auf die komplexe Zahlenebene  $\mathbb{C}$ .) Anders als die zuvor benutzten unendlichen Reihen sind hier Produkte und ihre unendlichen Varianten freilich das Mittel der Wahl. Ärgerlicherweise fällt hier allerdings die Konvergenztheorie geringfügig komplizierter aus. Wir folgen hier und im nächsten Abschnitt weitestgehend Rudin [17].

Für eine Folge  $(a_n)_n$  komplexer Zahlen betrachte man die Folge  $(p_N)_N$  von **Partialprodukten**

$$p_N := \prod_{n=1}^N a_n.$$

Wir sagen, dass das **unendliche Produkt**  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  **konvergiert**, falls die diesem zugeordnete Folge  $(p_N)_N$  von Partialprodukten konvergiert. Im Konvergenzfall schreiben

wir dann auch<sup>2</sup>

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} p_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n.$$

**Beispiele.**

(1)  $\prod_{n=1}^{\infty} 0$ ,  $\prod_{n=1}^{\infty} 1$  und  $\prod_{n=0}^{\infty} n$  sind konvergent, mit jeweiligen Werten 0, 1, bzw. 0.

(2)  $\prod_{n=1}^{\infty} n$  konvergiert nicht.

(3)  $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} = 0.$  (Teleskopprodukt!)

(4)  $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N} = \frac{1}{2}.$

Wir betrachten nun für  $z \in \mathbb{C}$  (ohne große Konvergenzüberlegungen anzustellen) das Produkt

$$(8.2) \quad f(z) := \prod_{n=2}^{\infty} (1 - z/n).$$

Es wäre freilich schön, wenn hierdurch (dort wo das Produkt konvergiert) eine holomorphe Funktion mit Nullstellen genau in 2, 3, 4, ... (den Nullstellen der Faktoren im Produkt!) definiert würde. Nun gilt allerdings, wie oben gesehen,  $f(1) = 0$ , obgleich keiner der am Produkt beteiligten Faktoren für  $z = 1$  verschwindet. Derartige Beispiele mögen als Grund verstanden werden, weshalb die hier gleich noch zu besprechende Konvergenztheorie unendlicher Produkte (insbesondere die noch einzuführende *absolute* Konvergenz von diesen) so aufgezogen wird, wie man sie eben aufzieht. Unsere Darstellung orientiert sich an Rudin [17].

Produkte sind Ergebnis der Multiplikation und eben jene ist oft komplizierter zu verstehen, als die Addition und die daraus gebildeten Summen. Addition und Multiplikation sind in  $\mathbb{C}$  jedoch mittels Exponentialfunktion und Logarithmen eng miteinander verwoben und es scheint naheliegend, unsere Fragen zu Produkten in Fragen zu Summen verwandeln. Das nächste Lemma leistet dies.

**Lemma 8.6.** Sind  $u_1, \dots, u_N$  komplexe Zahlen und

$$p_N = \prod_{n=1}^N (1 + u_n), \quad p_N^* = \prod_{n=1}^N (1 + |u_n|),$$

<sup>2</sup>Wie auch schon bei Reihen üblich, hat das unendliche Produkt „ $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ “ eine doppelte Bedeutung: einerseits meint man damit formal einen Ausdruck, aus dem man die Folge  $(a_n)_n$  herauslesen kann, andererseits ist auch der Grenzwert von  $(p_N)_N$  gemeint, falls dieser existiert.

so gilt

$$p_N^* \leq \exp\left(\sum_{n=1}^N |u_n|\right) \quad \text{und} \quad |p_N - 1| \leq p_N^* - 1.$$

*Beweis.* Wir bemühen sogleich für  $x \geq 0$  die Ungleichung

$$1 + x \leq 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \exp(x).$$

(Diese gilt bekanntlich sogar für alle  $x \in \mathbb{R}$ , was uns hier aber nicht zu interessieren braucht.) Damit folgt auch schon die erste im Lemma behauptete Ungleichung:

$$p_N^* \leq \prod_{n=1}^N \exp(1 + |u_n|) = \exp\left(\sum_{n=1}^N |u_n|\right).$$

Die zweite behauptete Ungleichung zeigen wir mittels Induktion. Für  $N = 1$  ist diese trivial und für den Induktionsschritt  $N \rightarrow N + 1$  beachte

$$\begin{aligned} |p_{N+1} - 1| &= |(1 + u_{N+1})p_N - 1| = |(1 + u_{N+1})(p_N - 1) + u_{N+1}| \\ &\leq |(1 + u_{N+1})(p_N - 1)| + |u_{N+1}| \\ &\leq (1 + |u_{N+1}|)(p_N^* - 1) + |u_{N+1}| \\ &= p_{N+1}^* - 1. \end{aligned} \quad \square$$

Aus der Analysis wissen wir bereits, dass normale Konvergenz von Funktionenreihen ein guter Begriff ist, welcher verträglich mit diversen Operationen, wie etwa Differenzierbarkeit ist. Das nächste Lemma zeigt, dass sich ein unendliches Produkt über Funktionen  $1 + u_n$  bei normaler Konvergenz der Reihe über  $u_n$  ebenfalls gut verhält: die Konvergenz des Produktes ist gleichmäßig, die Grenzfunktion hat nur die Nullstellen, die man erwartet und bei der Produktbildung kommt es nicht auf die Reihenfolge an.

**Lemma 8.7.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine beliebige Menge<sup>3</sup> und  $(u_n)_n$  bezeichne eine Folge beschränkter Funktionen  $u_n: U \rightarrow \mathbb{C}$  mit*

$$(8.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{z \in U} |u_n(z)| < \infty.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(1) *Das unendliche Produkt (präziser: die zugehörige Partialproduktfolge)*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$$

*konvergiert gleichmäßig auf  $U$ .*

---

<sup>3</sup>Wir wählen  $U$  später in Anwendungen oft nur als eine *kompakte* Teilmenge des eigentlichen Definitionsbereichs unserer Funktionen  $u_n$ .

- (2) Für  $z_0 \in U$  ist  $f(z_0) = 0$  genau dann wenn  $1 + u_n(z_0) = 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt.  
 (3) Ist  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine beliebige Permutation, so gilt überdies

$$f(z) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + u_{\sigma(m)}(z))$$

für alle  $z \in U$ . (D.h. man kann die Faktoren in obigem unendlichen Produkt beliebig umordnen.)

*Beweis.* Aus (8.3) und Lemma 8.6 schließen wir, dass

$$p_N(z) := \prod_{n=1}^N (1 + u_n(z))$$

unabhängig von  $z \in U$  beschränkt bleibt, etwa  $\sup_{z \in U} |p_N(z)| \leq C$  für eine geeignete Konstante  $C > 0$  und alle  $N \in \mathbb{N}$ .

Für  $\epsilon \in (0, 1/4)$  existiert nun ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$(8.4) \quad \sum_{n=N_0}^{\infty} \sup_{z \in U} |u_n(z)| < \epsilon.$$

Es sei nun  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine beliebige Permutation und  $N \geq N_0$  gegeben. Für  $M \geq \max \sigma^{-1}(\{1, \dots, N\}) < \infty$  gilt dann

$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(M)\} = \{1, \dots, N\} \cup \mathcal{N}$$

mit einer geeigneten endlichen Menge  $\mathcal{N} \subset \{N_0 + 1, N_0 + 2, \dots\}$ . Für

$$p_M^\sigma := \prod_{m=1}^M (1 + u_{\sigma(m)})$$

ergibt sich dann<sup>4</sup>

$$p_M^\sigma - p_N = p_N \left( \prod_{n \in \mathcal{N}} (1 + u_n) - 1 \right)$$

Unter Anwendung von Lemma 8.6 und (8.4) kommt

$$|p_M^\sigma - p_N| \leq |p_N| (\exp(\epsilon) - 1) \leq |p_N| 2\epsilon \leq 2C\epsilon.$$

Speziell im Fall  $\sigma = \text{id}_{\mathbb{N}}$  zeigt dies, dass  $p_N$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Die Aussage, dass man die Faktoren im  $f$ -definierenden Produkt beliebig umordnen darf, ohne den Produktwert zu verändern, folgt dann auch sofort, indem man  $\sigma$  wieder beliebig sein lässt.

Zur Aussage über das Nullstellenverhalten von  $f$  beachte man

$$|p_M - p_N| \leq |p_N| 2\epsilon$$

für  $M \geq N \geq N_0$  und somit, dank der umgekehrten Dreiecksungleichung,

$$|p_M| \geq (1 - 2\epsilon) |p_N| \geq \frac{1}{2} |p_N|.$$

<sup>4</sup>Wir lassen der Bequemlichkeit halber im Folgenden eingige Male das Argument  $z$  weg.

Durch Grenzwertbildung erhalten wir also

$$|f(z_0)| \geq \frac{1}{2} |p_{N_0}(z_0)|$$

und somit  $f(z_0) = 0$  genau dann wenn das *endliche* (!) Produkt  $p_{N_0}(z_0)$  verschwindet. Damit ist alles bewiesen.  $\square$

**Proposition 8.8.** *Es sei  $(f_n)_n$  eine Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Überdies sei keine der Funktionen  $f_n$  identisch Null und die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

*konvergiere kompakt auf  $U$ . Dann konvergiert auch das Produkt*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

*kompakt auf  $U$ . (Insbesondere ist  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph.) Überdies gilt*

$$\text{ord}_f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{ord}_{f_n}(z_0),$$

*wobei auf der rechten Seite höchstens endlich viele Terme von Null verschieden sind.*

*Beweis.* Der erste Teil folgt direkt aus Lemma 8.7, wenn man  $U$  dort als kompakte Teilmenge des hiesigen  $U$  wählt. Für die Aussage über die Nullstellen von  $f$  sei  $z_0 \in U$  beliebig und  $K \subset U$  eine abgeschlossene Kreisscheibe um  $z_0$  mit positivem Radius. Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|_K$$

gleichmäßig konvergiert, kann es höchstens endlich viele  $n$  geben, sodass  $f_n$  auf  $K$  eine Nullstelle besitzt. O.B.d.A. seien diese  $n$  alle kleiner als  $N \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$f(z) = \left( \prod_{n=1}^{N-1} f_n(z) \right) \prod_{n=N}^{\infty} f_n(z),$$

wobei das zweite Produkt laut Lemma 8.7 keine Nullstellen auf  $K$  besitzt. Wir haben nun

$$\text{ord}_f(z_0) = \sum_{n=1}^{N-1} \text{ord}_{f_n}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{ord}_{f_n}(z_0). \quad \square$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer hübschen Formel für den Sinus. (Man vergleiche dies insbesondere mit unseren Überlegungen aus § 8.2 im Anschluss an den Satz von Mittag-Leffler.)

**Korollar 8.9** (Euler, 1734). *Für  $z \in \mathbb{C}$  ist  $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ .*

*Beweisskizze.* Bezeichne das Produkt auf der rechten Seite der behaupteten Gleichung durch  $f$ . Laut Proposition 8.8 ist  $f$  eine ganze Funktion und diese hat wegen

$$1 - \frac{z^2}{n^2} = \left(1 + \frac{z}{n}\right)\left(1 - \frac{z}{n}\right)$$

und Proposition 8.8 einfache Nullstellen in den ganzen Zahlen. Mittels kompakter Konvergenz und Lemma 5.9 rechtfertigt man

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right).$$

Aus Satz 8.5 (siehe auch die Bemerkung auf Seite 129) ergibt sich dann

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \cot(\pi z) = \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin(\pi z)}.$$

Es folgt, dass sich  $h: z \mapsto \sin(\pi z)/f(z)$  zu einer ganzen Funktion mit verschwindender logarithmischer Ableitung fortsetzt. Also ist  $h$  konstant. Allerdings ist diese Konstante gleich 1, wie man durch Betrachtung der Ableitung bei  $z = 0$  einsehen kann.  $\square$

Durch Einsetzen von  $1/2$  für  $z$  in Korollar 8.9 (und Division durch  $\prod_{n=1}^{\infty}$ ) erhalten wir die folgende bekannte Formel (man vergleiche mit dem Beweis von Korollar 8.4):

**Korollar 8.10** (Wallis, 1655).  $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1}.$

#### 8.4. Weierstraßscher Produktsatz

Es sei nun  $(a_n)_n$  eine Folge nichtverschwindender komplexer Zahlen ohne Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$ . Wir wollen nun, wie schon zuvor angekündigt, eine ganze Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Nullstellenmenge  $f^{-1}(\{0\}) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  und

$$\text{ord}_f(z_0) = \#\{n \in \mathbb{N} : a_n = z_0\}$$

konstruieren.

Der Ansatz

$$„f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n)“$$

muss hier i.Allg. aber leider nicht zielführend sein, da wir die zur Anwendung von Proposition 8.8 benötigte kompakte Konvergenz von

$$(8.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |1 - (1 - z/a_n)|$$

nicht sicherstellen können. (Dass hier nicht bloß die reine Anwendbarkeit von Proposition 8.8 scheitert, sondern auch wirklich ein Problem vorliegt, hatten wir auch schon bei der Betrachtung von (8.2) erkannt.) Motiviert durch die Beweisidee vom Satz von Mittag-Leffler (Satz 8.1) sind wir nun bemüht, die Faktoren  $1 - z/a_n$  noch

mit einem weiteren Faktor  $h_n(z)$  zu multiplizieren, der diese „näher an 1 rückt“, sodass die kompakte Konvergenz des Produkts

$$(8.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |1 - (1 - z/a_n)h_n(z)|$$

zu (8.5) gewährleistet werden kann. Die Forderung<sup>5</sup>

$$(8.7) \quad 1 \approx (1 - z/a_n)h_n(z)$$

impliziert offenbar

$$(8.8) \quad h_n(z) \approx \frac{1}{1 - z/a_n}.$$

Wir pausieren an dieser Stelle, um zu betonen, dass man natürlich sofort in (8.7) Gleichheit erwirken kann, indem man  $h_n(z)$  einfach als die rechte Seite von (8.8) wählt. Selbstverständlich gelangt man hiermit aber zu keiner Lösung unseres ursprünglichen Problems, da hiermit zwar die Konvergenz von (8.6) (und also die des zugehörigen unendlichen Produkts) sichergestellt wird, man jedoch insgesamt (nach Hebung aller Singularitäten) nur die konstante 1-Funktion erhält, welche überhaupt keine Nullstellen besitzt. Damit der hier vorgestellte Ansatz also zielführend sein kann, ist es wichtig, dass in (8.8) zwar *ungefähr* Gleichheit, aber eben *nicht exakt* Gleichheit gilt.

Der obige Einschub legt nun nahe, die Faktoren  $h_n$  als Approximationen an (8.8) zu wählen. Um unerwünschte Singularitäten zu vermeiden, liegt es nahe, die  $h_n$  als ganze Funktionen wählen zu wollen. Taylor-Polynome wie im Satz von Mittag-Leffler lägen hierfür freilich nahe, doch bringen diese oft zusätzliche Nullstellen mit sich, welche es zu vermeiden gilt.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass wir eine nullstellenfreie, ganze Funktion  $h_n$  mit (8.8) suchen. Ungeachtet dessen, dass wir noch keine Idee haben, wie eine solche Funktion zu beschaffen sei, lässt sich jedenfalls folgendes bemerken: Jede solche Funktion  $h_n$  schreibt sich laut Aufgabe 9.4 in der Form  $h_n = \exp \circ L_n$  mit einer geeigneten ganzen Funktion  $L_n$  (siehe auch Proposition 4.10):

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow \exists L_n & \downarrow \exp \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{h_n} & \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{array}$$

Mit Blick auf

$$\exp(L_n(z)) \approx \frac{1}{1 - z/a_n}.$$

<sup>5</sup>Das Symbol „ $\approx$ “ soll hier als „ungefähr gleich“ gelesen werden. Da unsere hier geführten Überlegungen noch später präzisiert werden und hier nur zur Motivation dienen, kümmern wir uns an dieser Stelle nicht darum, dem hier benutzten Symbol eine rigorose Bedeutung zuzuweisen.

liegt es darum nahe,  $L_n(z)$  als (holomorphen) Logarithmus von  $1/(1 - z/a_n)$  zu wählen, aber in Ermangelung der Existenz eines solchen auf ganz  $\mathbb{C}$ , tun wir das nächst bessere und wählen  $L_n$  als *Taylor-Polynom* eines solchen, lokal definierten Logarithmus. Da wir uns  $|a_n|$  als gegen  $\infty$  strebend vorstellen, wird  $z/a_n$  für fast alle  $n$  ja nahe bei 0 sein und somit stellt sich auch die Wahl eines Logarithmus mit großem Definitionsbereich als unnötig heraus.

Unsere obigen Ausführungen motivieren die Betrachtung der folgenden Funktion  $E_\nu: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , gegeben durch

$$E_\nu(z) := (1 - z) \exp\left(z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{1}{\nu}z^\nu\right).$$

Diese Ausdrücke bezeichnet man auch gelegentlich als **Elementarfaktoren**; diese haben eine einfache Nullstelle bei 1 und sind ansonsten nullstellenfrei. Für  $a \neq 0$  kann man daraus durch  $z \mapsto E_\nu(z/a)$  die Nullstelle auch auf  $a$  verschieben, was gleich noch in Satz 8.12 eine Rolle spielen wird.

Das nächste Lemma liefert eine Präzisierung von (8.7) (im Fall  $a_n = 1$ ) für die eben definierten Elementarfaktoren:

**Lemma 8.11.** Für  $|z| \leq 1/2$  und  $\nu \in \mathbb{N}_0$  gilt  $|1 - E_\nu(z)| \leq 12|z|^{\nu+1}$ .

*Beweis.* Für  $|z| < 1$  ist (siehe Aufgabe 1.2)

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n\right) = 1 + z \quad \text{und also} \quad \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n\right) = \frac{1}{1-z}.$$

Speziell für  $|z| \leq 1/2$  und  $\varrho := \sum_{n>\nu} \frac{1}{n} z^n$  ergibt sich damit

$$1 = E_\nu(z) \exp(\varrho) = E_\nu(z) + E_\nu(z)(\exp(\varrho) - 1)$$

Umstellen liefert wegen  $|\varrho| \leq 1$

$$\begin{aligned} |1 - E_\nu(z)| &= |E_\nu(z)| \cdot |\exp(\varrho) - 1| = |E_\nu(z)| \cdot 2|\varrho| \\ &\leq |E_\nu(z)| \cdot 2 \frac{|z|^{\nu+1}}{1 - |z|} \leq 4|E_\nu(z)| \cdot |z|^{\nu+1}. \end{aligned}$$

Mit der trivialen Abschätzung

$$|E_\nu(z)| \leq \frac{3}{2} \exp(-\log(1/2)) = 3$$

ergibt sich sodann die behauptete Ungleichung. □

**Satz 8.12** (Weierstraßscher Produktsatz). *Es sei  $(a_n)_n$  eine Folge nichtverschwindender<sup>6</sup> komplexer Zahlen, die keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$  besitzt. Ferner sei  $(\nu_n)_n$  eine Folge in*

<sup>6</sup>Die Null kann man leicht mit einbeziehen, indem man zu der hier konstruierten Funktion  $f$  noch einen Faktor  $z \mapsto z^k$  hinzu-multipliziert. Wir müssen die Null hier leider gesondert miteinbeziehen, da wir in keinem Ausdruck „ $z/a_n$ “ durch Null teilen wollen.

$\mathbb{N}_0$  mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{|a_n|} \right)^{\nu_n+1} < \infty$$

für jedes  $r > 0$ . Dann ist durch

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \prod_{n=1}^{\infty} E_n(z/a_n)$$

eine ganze Funktion mit  $\text{ord}_f(z_0) = \#\{n \in \mathbb{N} : a_n = z_0\}$  gegeben.

*Beweis.* Es sei  $K \subset \mathbb{C}$  eine bliebig kompakte Menge. Wegen  $|a_n| \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  und der Beschränktheit von  $K$  folgt, dass  $\max\{|z|/|a_n| : z \in K\}$  für alle bis auf endlich viele  $n$  durch  $1/2$  beschränkt ist. Darum folgt mittels Lemma 8.11 die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - E_{\nu_n}(z/a_n)| \leq \{\text{const.}\} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\max\{|\xi| : \xi \in K\}}{a_n} \right|^{\nu_n+1}$$

Aus Proposition 8.8 folgt nun die Behauptung des Satzes.  $\square$

Es sollte nicht vergessen werden, dass in Satz 8.12 eine Funktion mit den gewünschten Nullstelleneigenschaften *explizit* angegeben wird. Um diesen Sachverhalt zu unterstreichen, extrahieren wir einige Spezialfälle.

**Bemerkung 8.13.** In der Situation von Satz 8.12 gilt  $|a_n| > 2r$  für alle bis auf endlich viele  $n$ . Man kann daher stets  $\nu_n := n$  wählen, möchte in der Praxis  $\nu_n$  aber eigentlich so klein wie möglich wählen (vgl. Korollar 8.9); im Beweis vom Satz von Mittag-Leffler hatten wir zwar ja auch ein geeignet hochgradiges Taylor-Polynom  $T_n$  zur Gewährleistung von (8.1) hergenommen, aber in der Praxis hatten uns deutlich schwächere Abschätzungen auch (8.1) gereicht — siehe § 8.2.

- (1) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n| < \infty$ , so können wir  $\nu_n = 0$  wählen.  $f(z)$  aus Satz 8.12 nimmt dann folgende Gestalt an:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right).$$

- (2) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^2 < \infty$ , so können wir  $\nu_n = 1$  wählen.  $f(z)$  aus Satz 8.12 nimmt dann folgende Gestalt an:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp\left( \frac{z}{a_n} \right).$$

**Beispiel.** Das unendliche Produkt  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n!)$  stiftet eine ganze Funktion, deren Nullstellenmenge durch  $\{n! : n \in \mathbb{N}\}$  gegeben ist. Überdies sind alle auftretenden Nullstellen einfach.

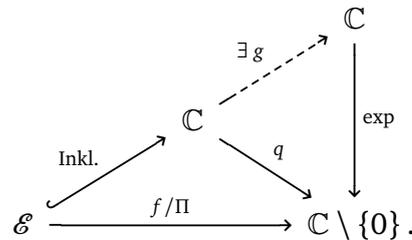
**Korollar 8.14** (Weierstraßscher Faktorisierungssatz). *Es sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze, nicht konstante Funktion und  $(a_n)_n$  sei eine Aufzählung<sup>7</sup> der von Null verschiedenen Nullstellen von  $f$ , wobei diese ihrer Vielfachheiten entsprechend häufig vorkommen mögen. Dann gibt es eine (ggf. endliche) Folge  $(\nu_n)_n$  in  $\mathbb{N}_0$  und eine ganze Funktion  $g$  mit*

$$f(z) = \exp(g(z)) z^{\text{ord}_f(0)} \prod_n E_{\nu_n}(z/a_n).$$

*Beweis.* Wie bereits bemerkt, kann man etwa  $\nu_n = n$  setzen und erhält dann durch

$$\Pi: z \mapsto z^{\text{ord}_f(0)} \prod_n E_{\nu_n}(z/a_n)$$

eine ganze Funktion, welche (mit Vielfachheiten!) dieselben Nullstellen wie  $f$  besitzt. Die Funktion  $z \mapsto f(z)/\Pi(z)$  hat dann in  $\mathcal{E} = \{a_n : n\} \cup \{0 : f(0) = 0\}$  nur hebbare Singularitäten (beachte die in § 3.7 auf Singularitäten übertragenen Rechenregeln aus Bemerkung 3.8) und setzt sich zu einer nullstellenfreien(!) ganzen Funktion  $q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  fort. Proposition 4.10 liefert die Existenz einer ganzen Funktion  $g$  mit  $q = \exp \circ g$ :



Hieraus ergibt sich die Behauptung. □

**Korollar 8.15.** *Jede auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion  $f$  lässt sich als Quotient zweier ganzer Funktionen schreiben.*

*Beweis.* Dank Satz 8.12 gibt es eine ganze Funktion  $q$ , deren Nullstellen genau die Pole von  $f$  sind (mit Vielfachheiten). Dann sind alle Singularitäten von  $qf$  hebbar und diese Funktion setzt sich zu einer ganzen Funktion  $p$  fort. Wir haben dann  $f = p/q$ , wie gewünscht.<sup>8</sup> □

Das obige Korollar 8.15 eröffnet einen neuen Blickwinkel auf die auf  $\mathbb{C}$  meromorphen Funktionen. Tatsächlich gilt allgemeiner: jede auf einem Gebiet  $U$  meromorphe Funktion lässt sich als Quotient zweier auf  $U$  holomorpher Funktionen schreiben (siehe etwa [17, 15.11 und 15.12]).<sup>9</sup> Daraus (und aus der Tatsache, dass der Quotient zweier auf einem Gebiet holomorpher Funktionen genau dann die Nullfunktion ist,

<sup>7</sup>Man beachte, dass  $f$  höchstens abzählbar viele Nullstellen besitzen kann, da diese sich anderenfalls dank Proposition 8.2 häufen müssten und  $f$  also gemäß Satz 3.7 konstant wäre.

<sup>8</sup>Man beachte, dass zum Folgern der letzten Gleichung wichtig ist, dass  $q$  überall wo  $f$  definiert ist nullstellenfrei ist, da wir sonst nicht durch  $q$  teilen dürften; ansonsten hätte der Beweis ja auch mit  $q = (z \mapsto 0)$  funktioniert (tut er aber offensichtlich i.Allg. nicht).

<sup>9</sup>Von einem Beweis davon sind wir an dieser Stelle gar nicht weit entfernt.

wenn die „Zählerfunktion“ die Nullfunktion ist) folgert man leicht, dass der Körper der auf  $U$  meromorphen Funktionen<sup>10</sup> in offensichtlicher Art und Weise isomorph zum Quotientenkörper  $\text{Quot}(\mathcal{H}(U))$  des Rings  $\mathcal{H}(U)$  der auf  $U$  holomorphen Funktionen ist.

---

<sup>10</sup>Streng genommen muss man hier zwei auf  $U$  meromorphe Funktionen  $f, g$  identifizieren, wenn es eine auf  $U$  meromorphe Funktion  $h$  gibt, deren Definitionsbereich die Definitionsbereiche  $D_f$  und  $D_g$  von  $f$  und  $g$  umfasst und  $h|_{D_f} = f$  sowie  $h|_{D_g} = g$  gilt.



ANHANG A

Übungsaufgaben

1. Übung

1.1. (Kettenregel und Umkehrregel) (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie die (komplexe) Kettenregel: Es seien  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  zwei offene Mengen,  $f: U \rightarrow V$  und  $g: V \rightarrow \mathbb{C}$  zwei Funktionen, und  $f$  sei in  $z_0 \in U$  komplex-differenzierbar, sowie  $g$  in  $f(z_0)$ . Dann ist auch  $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z_0$  komplex-differenzierbar und es gilt  $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$ .

(b) Beweisen Sie die folgende Umkehrregel:  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $f': U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  sei stetig und stets von Null verschieden. Dann gibt es zu jedem  $z_0 \in U$  eine offene Umgebung  $V$  auf der  $f$  injektiv ist und die Umkehrfunktion  $f^{-1}: f(V) \rightarrow V$  von  $f|_V: V \rightarrow f(V)$  im Punkt  $w_0 = f(z_0)$  komplex-differenzierbar ist und  $(f^{-1})'(w_0) = 1/f'(z_0)$  erfüllt.

(Hinweis: Die schwierige Kern dieser Aussage ist Ihnen bereits aus der reellen Analysis als Satz über lokale Umkehrbarkeit bekannt. Hauptaufgabe ist es hier also nur noch zwischen  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}^2$  geeignet zu übersetzen.)

1.2. (Logarithmus)

Beweisen Sie  $\exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n} z^n) = 1 + z$  für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$ .

(Hinweis: Bestimmen Sie die Ableitung des Quotienten beider Seiten.)

1.3. (Spiegelung) (4 Punkte)

Es sei  $U$  offen,  $\bar{U} = \{\bar{z} : z \in U\}$  das Bild von  $U$  unter der komplexen Konjugation  $\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x + iy \mapsto x - iy$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Betrachten Sie die Abbildung  $\tilde{f}: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$ :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \bar{\cdot} \uparrow & & \downarrow \bar{\cdot} \\ \bar{U} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C} \end{array}$$

Zeigen Sie, dass  $\tilde{f}$  holomorph ist. (Hinweis: Reelle Kettenregel in  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ .)

1.4. (Möbius-Transformationen)

Für ein Symbol  $\infty \notin \mathbb{C}$  setze man  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Für komplexe Zahlen  $a, b, c, d \in$

$\mathbb{C}$  mit  $ad - bc \neq 0$  nennt man die Abbildung

$$T = T_{c,d}^{a,b}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{falls } z \notin \{-d/c, \infty\}, \\ \infty & \text{falls } z = -d/c, \\ a/c & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

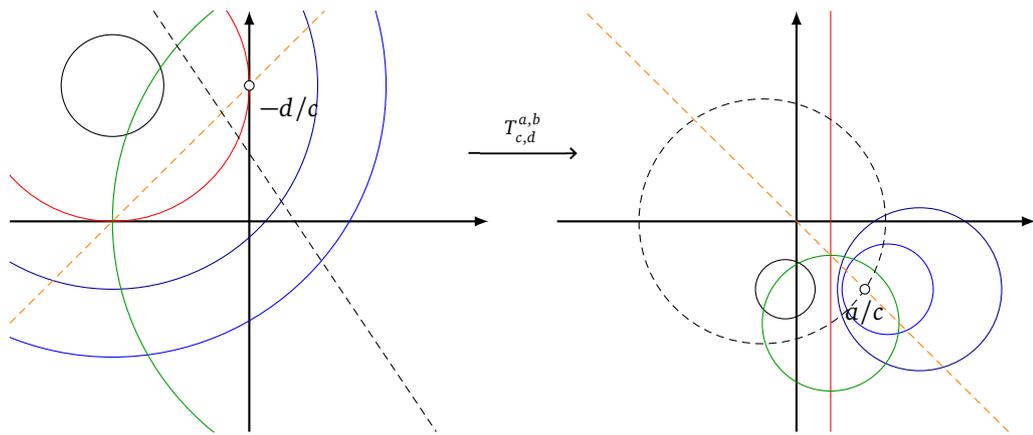
eine *Möbius-Transformation*. (Im Fall  $c = 0$  sind in der obigen Definition und im Rest der Aufgabe  $-d/c$  und  $a/c$  jeweils als  $\infty$  zu verstehen.) Zeigen Sie:

- (a) Für geeignete  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  hat man  $T = T_{0,1}^{\alpha,\gamma} \circ T_{1,0}^{0,1} \circ T_{0,1}^{1,\beta}$ , also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{T} & \hat{\mathbb{C}} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{T_{1,0}^{0,1}=(z \mapsto 1/z)} & \hat{\mathbb{C}} \\ & \swarrow & & \nearrow \\ & \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{T_{0,1}^{1,\beta}=(z \mapsto z+\beta)} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

- (b)  $T$  bildet  $\hat{\mathbb{C}}$  bijektiv auf  $\hat{\mathbb{C}}$  ab.  
 (c)  $T|_{\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}}: \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$  ist holomorph mit nirgends verschwindender Ableitung.  
 (d) Unter einer *Kreislinie*  $\mathcal{K}$  verstehen wir den Rand einer Kreisscheibe und unter einer *Geraden*  $\mathcal{L}$  mit  $\infty$  verstehen wir die Vereinigung von einem eindimensionalen affinen  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von  $\mathbb{C}$  mit  $\{\infty\}$ . Dann induziert  $T$  eine Selbstabbildung der Menge von Kreislinien und Geraden; Präziser gilt für  $\mathcal{X} \in \{\mathcal{K}, \mathcal{L}\}$

$$T(\mathcal{X}) \text{ ist eine } \begin{cases} \text{Kreislinie} & \text{falls } -d/c \notin \mathcal{X}, \\ \text{Gerade mit } \infty & \text{falls } -d/c \in \mathcal{X}. \end{cases}$$



(Hinweis: Überzeugen Sie sich, dass es dank der ersten Teilaufgabe im Wesentlichen genügt, den Fall  $(a, b, c, d) = (0, 1, 1, 0)$  genauer zu untersuchen; Hierbei hilft vielleicht die Kreisgleichung  $z\bar{z} + z\bar{\beta} + \beta\bar{z} + r = 0$ .)

## 2. Übung

### 2.1. (Fundamentalsatz der Algebra) (4 Punkte)

Es sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  eine Polynomfunktion (mit  $n \in \mathbb{N}$  und Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ ). Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.2), indem Sie nacheinander die folgenden Aussagen beweisen:

(a) Die reellwertige Funktion  $|f|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $z \mapsto |f(z)|$  nimmt ein Minimum an.

(Hinweis: Kompaktheit könnte helfen, aber leider ist  $\mathbb{C}$  nicht kompakt...)

(b) Für jedes  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit  $f(z_0) \neq 0$  gibt es ein  $\zeta \in \mathbb{C}$  mit  $|f(z_0 + \zeta)| < |f(z_0)|$ .

(Hinweis: Schreiben Sie  $f(z_0 + \zeta) = f(z_0) + b_k\zeta^k + \dots + b_{n-1}\zeta^{n-1} + \zeta^n$  mit geeigneten  $k \in \{1, \dots, n\}$  und Koeffizienten  $b_k, \dots, b_{n-1}, b_n \in \mathbb{C}$  und beachten Sie  $f(z_0 + \zeta) \approx f(z_0) + b_k\zeta^k$  für sehr kleine  $|\zeta|$ . — Welche Wahl von  $\zeta$  bietet sich nun an, um die Behauptung zu zeigen? Beachten Sie Korollar 1.8.)

(c) Es gibt ein  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit  $f(z_0) = 0$ .

### 2.2. (Beweisen oder widerlegen) (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so auch  $z \mapsto |\exp(f(z))|$ .

(b) Für  $z \in \mathbb{C}$  ist  $\sin(\pi z) = 0$  genau dann wenn  $z \in \mathbb{Z}$ .

(c) Jede Bildmenge  $\{\sin(z) : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) = c\}$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ist ein Kreis.

### 2.3. ( $\mathbb{C}$ -Linearität des Wegintegrals)

Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Integrationsweg und  $f$  und  $g$  zwei stetige auf  $\operatorname{tr}(\gamma)$  definierte komplexwertige Funktionen, sowie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie

$$\int_{\gamma} (f(z) + \lambda g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \lambda \int_{\gamma} g(z) dz.$$

### 2.4. (Windungszahl für einen Kreisweg)

Für  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$  sei  $\zeta \in B(z_0, r)$  und  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto z_0 + r \exp(2\pi i t)$  der bekannte Kreisweg. Zeigen Sie die bereits aus Korollar 2.10 bekannte Formel

$$\operatorname{Ind}_{\gamma}(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - \zeta} dz = 1$$

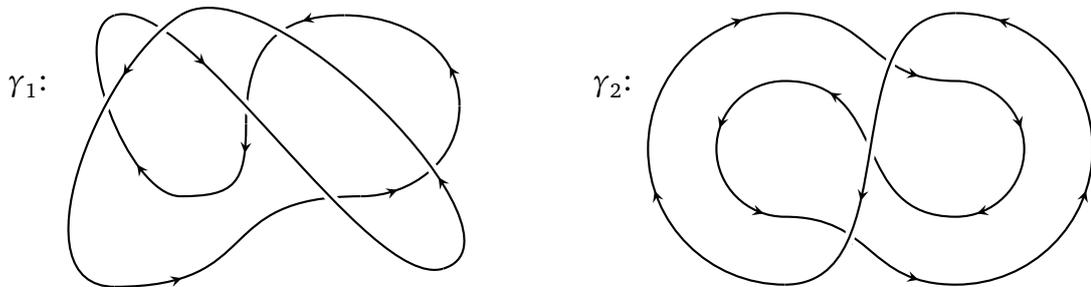
durch eine alternative Rechnung, indem Sie  $\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$  in eine geometrische Reihe entwickeln und sich überlegen, dass Sie gliedweise integrieren dürfen.

### 3. Übung

#### 3.1. (Windungszahl)

(4 Punkte)

Die folgenden Abbildungen zeigen (bei gutwilliger Interpretation) zwei geschlossene Wege:  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .



Berechnen Sie  $\text{Ind}_{\gamma_k}(z_0)$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{tr}(\gamma)$  und  $k \in \{1, 2\}$ .

#### 3.2. (Zum Lemma von Goursat)

(4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Aussage vom Lemma von Goursat (Lemma 2.12) i.Allg. falsch wird, wenn man in dessen Formulierung (siehe Skriptum!)

$$\text{„}f: U \rightarrow \mathbb{C} \text{ sei } [\dots] \text{ holomorph auf } U \setminus \{p\}\text{“}$$

durch

$$\text{„}f: U \rightarrow \mathbb{C} \text{ sei } [\dots] \text{ reell total-differenzierbar auf } U \setminus \{p\}\text{“}$$

ersetzt.

- (b) Erklären Sie, wo der in der Vorlesung besprochene Beweis von Lemma 2.12 schief geht, wenn man die Ersetzung aus der vorherigen Teilaufgabe vornimmt.

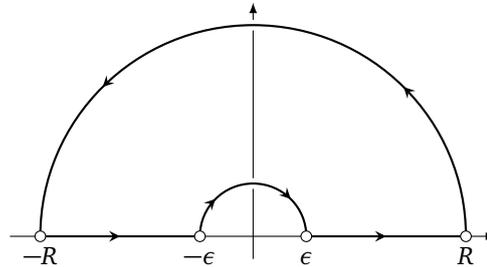
(Hinweis: Natürlich wird es dort scheitern, wo man sich auf Holomorphie berufen möchte; Freilich sollen Sie aber auch erklären können, weshalb reelle totale Differenzierbarkeit i.Allg. als Ersatz nicht hinreicht.)

#### 3.3. (Ein reelles Integral)

Zeigen Sie, dass das folgende reelle Integral existiert und berechnen Sie dessen Wert:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx.$$

Vielleicht mag es helfen zunächst für Parameter  $0 < \epsilon < R$  das komplexe Wegintegral mit Integrand  $(1 - \exp(iz))/z^2$  über den folgenden Weg zu berechnen:



(Hinweis: Sie können sich an Beispiel 2.13 orientieren. Falls Sie keine Dreiecke sehen, rektifizieren Sie!)

### 3.4. (Satz von Cauchy für Kreiswege mittels Green/Stokes)

Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  in jedem Punkt von  $U$   $n$ -mal stetig komplex-differenzierbar (mit  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) so klein wie Ihnen möglich, aber so groß wie sie möchten). Ferner sei  $\bar{B}(z_0, r) \subset U$  eine abgeschlossene Kreisscheibe in  $U$  und  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ ,  $t \mapsto z_0 + r \exp(2\pi it)$  der bekannte Kreisweg. Zeigen Sie dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

indem Sie Real- und Imaginärteil des fraglichen Wegintegrals mit dem Integralsatz von Green berechnen.

(Hinweis: Nach Anwendung des Integralsatzes von Green mögen ggf. die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen helfen. Besonderen Ruhm und Ehre bekommen Sie, falls Sie die Aufgabe in die Sprache der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten übersetzen,  $f(z) dz$  passend als komplexwertige Differentialform interpretieren und mit dem allgemeinen Integralsatz von Stokes–Cartan arbeiten. Sie sollten sich natürlich auch jeweils überlegen, ob dies erlaubt ist.)

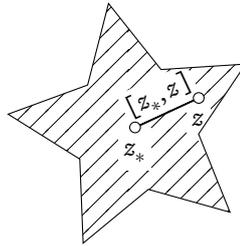
## 4. Übung

### 4.1. (Satz von Cauchy für Sterngebiete)

(4 Punkte)

Eine Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  heißt *sternförmig*, falls es einen Punkt  $z_0 \in U$  gibt derart, dass für jedes  $z \in U$  das gesamte Geradenstück  $[z_*, z] = \{(1-t)z_* + tz \in \mathbb{C} : t \in [0, 1]\}$  in  $U$  enthalten ist. (Einen Punkt  $z_*$  mit der eben genannten Eigenschaft

nennt man auch *Sternpunkt* von  $U$ .)



Zeigen Sie, dass Satz 2.14 auch gültig bleibt, wenn man die Voraussetzung „konvex“ durch „sternförmig“ ersetzt, d.h. sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und sternförmig und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig auf  $U$  und holomorph auf  $U \setminus \{p\}$  für ein  $p \in U$ . Zeigen Sie, dass ein holomorphes  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F' = f$  existiert.

**4.2. (Variante vom Satz von Liouville)** (4 Punkte)

Es sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Zeigen Sie, dass entweder  $f(\mathbb{C})$  dicht in  $\mathbb{C}$  liegt, oder  $f$  konstant ist.

**4.3. (Legendre-Polynome)**

Die Legendre-Polynome  $P_n$  sind definiert durch

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Zeigen Sie für  $x \in (-1, 1)$  die Integraldarstellung

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + i\sqrt{1-x^2} \cos(t))^n dt.$$

(Hinweis:  $P_n$  ist *beinahe* schon als Taylor-Koeffizient einer gewissen Funktion definiert. Wie man an so etwas mittels Integration ran kommen kann, sollte Ihnen aus Kapitel 3 bekannt sein. Anschließend hilft nur noch stoisches Rechnen...)

**4.4. (Anwendungen der Cauchyschen Abschätzungen)**

Zeigen Sie für  $n \in \mathbb{N}$  die folgenden beiden Ungleichungen:

(a)  $n! \geq (n/e)^n$ , mit  $e := \exp(1)$ ;

(b)  $\binom{2n}{n} \leq 4^n$ .

(Historische Notiz: Die vorliegende Ungleichung war instrumental in einem frühen Durchbruch in der Theorie der Primzahlverteilung durch Čebyšëv, dem es 1851/52 mittels der Beobachtung, dass  $\binom{2n}{n}$  von allen Primzahlen im Intervall  $(n, 2n]$  geteilt wird, zu zeigen gelang, dass für die Anzahl  $\pi(x)$  aller Primzahlen  $\leq x$  eine Ungleichungskette  $c \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq C \frac{x}{\log x}$  mit geeigneten Konstanten  $0 < c < C$  besteht.)

(Hinweis: Man sollte für die Ungleichung relevante Zahlen als Taylor-Koeffizienten einer holomorphen Funktion auffassen. Der Rest vom Hinweis steht dann im Titel.)

## 5. Übung

## 5.1. (Spiegelung, II) (4 Punkte)

Es sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze Funktion mit  $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ . Zeigen Sie  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

## 5.2. (Eine interessante Ungleichung) (4 Punkte)

Bestimmen Sie sämtliche nullstellenfreien, ganzen Funktionen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , welche für alle  $z \in \mathbb{C}$  der Ungleichung  $|f(11z)| < 2020|f(z)|$  genügen.

## 5.3. (Harmonische Funktionen)

Im Folgenden wird mehrfach stillschweigend von der Identifikation  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  Gebrauch gemacht. Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend und  $u: G \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch, d.h.  $u$  sei zwei mal stetig partiell differenzierbar und  $u_{xx} + u_{yy}$  sei die Nullfunktion auf  $G$ . (Hier bezeichnen  $u_{xx}$  und  $u_{yy}$  die zweite partielle Ableitung von  $u$  nach der ersten respektive zweiten Variablen.) Ferner sei  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a)  $\operatorname{Re}(f)$  ist harmonisch.

(b)  $u$  lässt sich auf jeder offenen Kreisscheibe  $B \subseteq G$  als Realteil einer holomorphen Funktion  $F: B \rightarrow \mathbb{C}$  schreiben.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktion  $B \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x+iy \mapsto u_x(x,y) - iu_y(x,y)$  holomorph ist und überlegen Sie sich, dass diese eine Stammfunktion besitzt.)

(c) Für alle Punkte  $(x_0, y_0) \in G$  und  $r < 0$  mit  $\bar{B}(x_0 + iy_0, r) \subseteq G$  ist

$$u(x_0, y_0) = \int_0^1 u(x_0 + r \cos(2\pi t), y_0 + r \sin(2\pi t)) dt.$$

(Hinweis: Korollar 3.1.)

(d)  $u$  nimmt dann und nur dann ein globales Maximum auf  $G$  an, wenn  $u$  konstant ist.

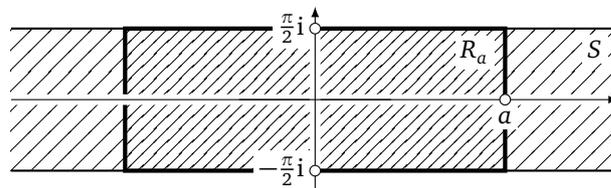
(Hinweis: Zeigen Sie, dass  $\{(x, y) \in G : u(x, y) = \sup u(G)\}$  abgeschlossen und offen zugleich ist.)

(e)  $u_f: G \setminus f^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto \log(|f(x+iy)|^2)$ , ist harmonisch.

(f) Es gilt  $\max_{z \in K} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial K} |f(z)|$  für jede kompakte Menge  $K \subset G$ .

## 5.4. (Maximumprinzip am konkreten Fall)

Betrachten Sie die ganze Funktion  $f = \exp \circ \exp$ , das Rechteck  $R_a := \{x + iy \in \mathbb{C} : |x| \leq a \text{ und } |y| \leq \pi/2\}$  (mit  $a > 0$ ), sowie den Streifen  $S = R_\infty$ :



(a) Bestimmen Sie das Maximum von  $|f|$  auf  $R_a$ . Wo wird dieses angenommen?

- (b) Zeigen Sie  $\sup_{z \in \partial \mathbb{D}} |f(z)| < \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$ .  
 (c) Weshalb steht Teil (b) nicht im Widerspruch zu Aufgabe 5.3 (f)?

## 6. Übung

### 6.1. (Lemma von Schwarz–Pick) (4 Punkte)

$f, g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  seien zwei holomorphe Selbstabbildungen der Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D} = B(0, 1)$ . Ferner sei  $f(0) = 0$ . Zeigen Sie:

- (a)  $|f(z)| \leq |z|$  für alle  $z \in \mathbb{D}$  und  $|f'(0)| \leq 1$ .  
 (Hinweis: Heben Sie die isolierte Singularität von  $h: \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto f(z)/z$ , und benutzen Sie Korollar 3.14 mit  $K = r\overline{\mathbb{D}}$  und  $r \nearrow 1$ .)  
 (b) Gilt  $|f(z_0)| = |z_0|$  für ein  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  oder  $|f'(0)| = 1$ , so ist  $f$  eine Drehung (d.h. es ist  $f = (z \mapsto \xi z)$  für ein geeignetes  $\xi \in \partial \mathbb{D}$ ).  
 (c) Für  $\eta \in \mathbb{D}$  bildet die Möbius-Transformation  $T_\eta: z \mapsto \frac{z - \eta}{\overline{\eta}z - 1}$  die Einheitskreisscheibe biholomorph auf sich ab.  
 (d) Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  gilt

$$\left| \frac{g(z_1) - g(z_2)}{1 - \overline{g(z_1)}g(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2} \right| \quad \text{und} \quad \frac{|g'(z)|}{1 - |g(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

(Hinweis: Wählen Sie geeignete Möbius-Transformationen  $T_\zeta$  und  $T_\xi$ , sodass Sie Teil (a) auf  $T_\zeta \circ g \circ T_\xi$  anwenden können.)

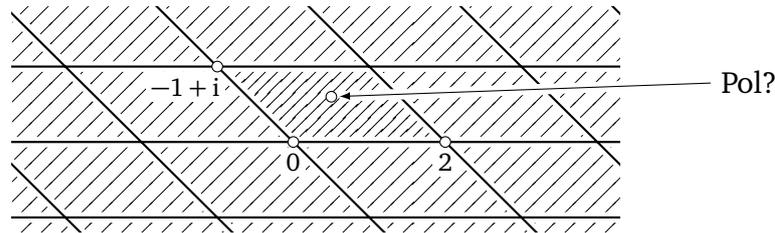
### 6.2. (Ganz und Eins auf dem Einheitskreisrand) (4 Punkte)

- (a) Es sei  $f$  holomorph auf einer offenen Umgebung von  $\overline{\mathbb{D}}$  und es gelte  $|f(z)| = 1$  für alle  $z \in \partial \mathbb{D}$ . Zeigen Sie, dass  $f$  entweder konstant ist oder mindestens eine Nullstelle auf  $\mathbb{D}$  besitzt.  
 (b) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die  $|f(z)| = 1$  für alle  $z \in \partial \mathbb{D}$  erfüllen.  
 (Hinweis: Betrachten Sie Singularitäten von  $z \mapsto 1/\overline{f(1/\overline{z})}$ . Was hat das mit  $f$  zu tun?)

### 6.3. (Vermischtes)

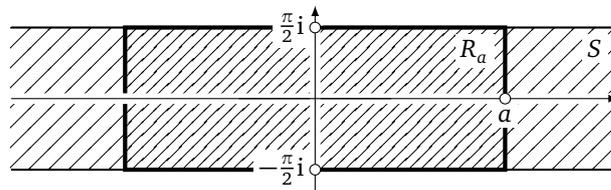
- (a) Es sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze Funktion mit  $f(i/n) = f(1 + i/n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass  $f$  1-periodisch ist (d.h. es gilt  $f(z) = f(z + 1)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ ).  
 (b) Gibt es eine nullstellenfreie ganze Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(0) = 11$  und  $|f(z)| \geq 2020$  für alle  $z \in \partial \mathbb{D}$ ? (Falls ja, geben Sie eine solche an, falls nicht, beweisen Sie dies.)  
 (c) Es sei  $g$  meromorph auf  $\mathbb{C}$  mit  $g(z) = g(z + 2) = g(z - 1 + i)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass  $g$  entweder konstant ist oder mindestens einen Pol in  $\mathbb{C}$

besitzt.



#### 6.4. (Eine Instanz des Phragmén–Lindelöf-Prinzips)

Es sei  $S = \{x + iy \in \mathbb{C} : |y| \leq \frac{\pi}{2}\}$  der Streifen aus Aufgabe 5.4 und  $U$  bezeichne sein Inneres.



- (a) Ferner sei  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  stetig auf  $S$  und holomorph auf  $U$  und es mögen Konstanten  $\alpha \in (0, 1)$  und  $A \in (0, \infty)$  existieren derart, dass

$$|f(x + iy)| < \exp(A \exp(\alpha|x|))$$

für alle  $x + iy \in S$  gelte. Ferner sei  $f$  auf  $\partial S$  im Betrage durch 1 beschränkt. Zeigen Sie dann, dass  $f$  auf ganz  $S$  im Betrage durch 1 beschränkt ist.

(Anleitung: Betrachten Sie für  $\beta \in (\alpha, 1)$  und  $\epsilon > 0$  die schnell abfallende Hilfsfunktion  $h_\epsilon: S \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \exp(-\epsilon(\exp(\beta z) + \exp(-\beta z)))$ , zeigen Sie  $|h(z)| \leq 1$  auf  $S$  und wenden Sie dann Korollar 3.14 auf  $fh_\epsilon$  und eine geeignete kompakte Teilmenge von  $S$  an.)

- (b) Bleibt die Aussage von Teil (a) richtig, wenn man  $\alpha = 1$  zulässt?

### 7. Übung

#### 7.1. (Konforme Automorphismen von $\mathbb{C}$ )

(4 Punkte)

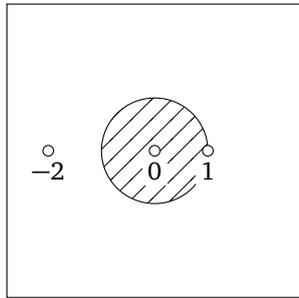
Zeigen Sie, dass die biholomorphen Abbildungen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  genau die affin-linearen Abbildungen  $z \mapsto az + b$  ( $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ ) sind.

(Hinweis: Betrachten Sie zu gegebenem biholomorphen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die holomorphe Funktion  $g: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto f(1/z)$ , und zeigen Sie, dass  $g$  bei 0 einen Pol erster Ordnung besitzt.)

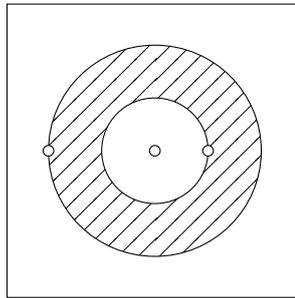
#### 7.2. (Laurentreihen)

Es sei  $f$  die meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$ , welche durch  $z \mapsto \frac{9(z+1)}{(z-1)^2(z+2)}$  gegeben ist.

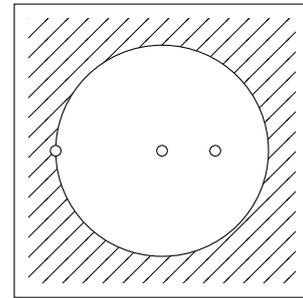
(a) Entwickeln Sie  $f$  auf den folgenden Kreisringen jeweils in eine dort konvergente Laurentreihe:



$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\},$$



$$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\},$$



$$\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 4\}.$$

(b) In (a) haben Sie für verschiedene Kreisringe (hoffentlich) jeweils eine verschiedene Laurententwicklung von  $f$  erhalten. Weshalb steht dies nicht im Widerspruch zu Lemma 3.17, welches ja zu behaupten scheint, dass die Laurentkoeffizienten eindeutig seien?

**7.3. (Der étalé-Raum)**

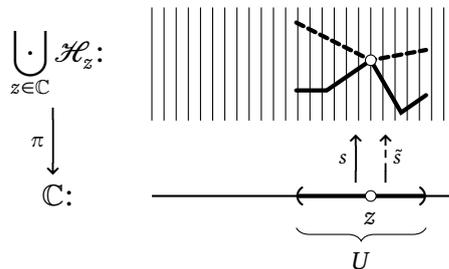
(4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 4.1 aus der Vorlesung: Es sei  $X = \bigsqcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  der étalé-Raum mit der Topologie, welche durch die Mengen  $N(f, U) = \{[(f, U)]_z : z \in U\}$  (mit  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f \in \mathcal{H}(U)$ ) erzeugt wird. Ferner sei  $\pi: X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $[(f, U)]_z \mapsto z$ , die bekannte Projektion. Dann gilt:

- (a) Jeder stetige Schnitt<sup>1</sup>  $s: U \rightarrow \bigsqcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  über offenem  $U \subseteq \mathbb{C}$  kommt von einer holomorphen Funktion, d.h. für jedes solche  $s$  gibt es ein  $f \in \mathcal{H}(U)$  mit  $s = s_f$ .
- (b) Die auf  $X$  eingeführte Topologie ist die feinste Topologie derart, dass alle lokalen Schnitte  $s_f: U \rightarrow X$  für alle offenen Mengen  $U \subseteq \mathbb{C}$  und alle holomorphen Funktionen  $f \in \mathcal{H}(U)$  stetig sind.
- (c)  $X$  ist ein Hausdorff-Raum.
- (d)  $\pi$  ist ein lokaler Homöomorphismus.

**7.4. (Stetige und unstetige Schnitte)**

Die folgende Abbildung zeigt zwei lokale Schnitte  $s$  (—) und  $\tilde{s}$  (----) über einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$ :



<sup>1</sup>Mit „Schnitt“ sei hier gemeint, dass  $\pi \circ s = \text{id}_U$  gilt.

Zeigen Sie, dass mindestens einer dieser beiden Schnitte unstetig ist.  
 (Hinweis: Hier ist es natürlich Teil der Aufgabe, sinnvoll zu interpretieren, welche Voraussetzungen an  $s$  und  $\tilde{s}$  einem die Abbildung liefert.)

### 8. Übung

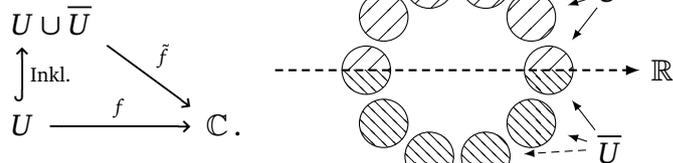
**8.1. (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)** (4 Punkte)

Sei  $U$  eine in der Teilraumtopologie der abgeschlossenen oberen Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$  offene Menge. Wir setzen

$$U^\circ = \{z \in U : \text{Im } z > 0\} \quad \text{und} \quad \bar{U} = \{\bar{z} : z \in U\} = \{x - iy : x + iy \in U\},$$

wobei  $\bar{\cdot}$  hier die komplexe Konjugation bezeichne (und nicht etwa das Abschließen einer Menge in einer Topologie). Ferner sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine auf  $U$  stetige Funktion, die in  $U^\circ$  holomorph ist und auf  $U \cap \mathbb{R}$  reellwertig ist. Dann lässt sich  $f$  durch wie folgt zu einer auf  $U \cup \bar{U}$  holomorphen Funktion  $\tilde{f}: U \cup \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$  fortsetzen:

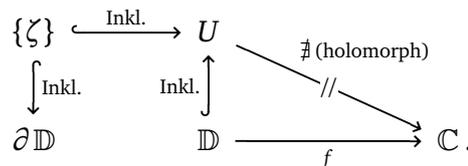
$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in U, \\ f(\bar{z}) & \text{für } z \in \bar{U}, \end{cases}$$



(Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Morera (Satz 3.6).)

**8.2. (Fortsetzen funktioniert nicht immer)** (4 Punkte)

Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine beliebige offene Menge, die den Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$ , sowie einen Punkt  $\zeta \in \partial \mathbb{D}$  enthält. Dann besitzt die holomorphe Funktion  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , gegeben durch  $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ , keine Fortsetzung zu einer auf  $U$  holomorphen Funktion; d.h. es gibt keine holomorphe Funktion  $U \rightarrow \mathbb{C}$ , welche das folgende Diagramm kommutativ macht:



(Hinweis: Betrachten Sie  $f(r \exp(2\pi i x))$  für  $x \in \mathbb{Q}$  und  $r \nearrow 1$ .)

**8.3. (Garbe von Halmen stetiger Funktionen)**

Für eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}$  sei  $\mathcal{C}(U)$  die Menge aller stetigen Funktionen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Zwei Funktionselemente  $(f_1, U_1)$  und  $(f_2, U_2)$  mit  $x \in U_1 \cap U_2$  sollen bei  $x$  äquivalent heißen (in Zeichen:  $(f_1, U_1) \sim_x (f_2, U_2)$ ), wenn  $f_1$  und  $f_2$  auf einer offenen Umgebung  $V \subseteq U_1 \cap U_2$  von  $x$  übereinstimmen. Wir definieren  $\mathcal{C}_x$  als  $\{(f, U) : U \subseteq \mathbb{R} \text{ offen, } x \in U, f \in \mathcal{C}(U)\}$  modulo dieser Äquivalenzrelation und betrachten  $\mathcal{C} := \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{C}_x$ . Analog zur Diskussion von  $\bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$  aus der Vorlesung stattdet man  $\mathcal{C}$  nun mit der feinsten Topologie aus, bezüglich der alle Schnitte  $s_f: U \rightarrow \mathcal{C}, x \mapsto [(f, U)]_x$ , mit allen offenen  $U \subseteq \mathbb{R}$  und allen  $f \in \mathcal{C}(U)$

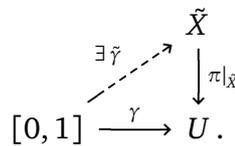
stetig sind.

Zeigen Sie, dass  $\mathcal{C}$  kein Hausdorffraum ist (d.h. finden Sie zwei Punkte  $[(f_1, U_1)]_{x_1}$  und  $[(f_1, U_2)]_{x_1}$  in  $\mathcal{C}$ , für die es *keine* zwei offenen Umgebungen  $V_1, V_2 \subseteq \mathcal{C}$  der jeweiligen Punkt gibt mit  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ).

**8.4.** (Fortsetzen funktioniert trivialerweise, wenn man schon eine Fortsetzung hat)

Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f \in \mathcal{H}(U)$  und  $z_0 \in U$ .  $\tilde{X}$  bezeichne die Menge aller Keime  $\tilde{z}_1 = [(f_1, U_1)]_{z_1}$  derart, dass es einen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  in  $U$  gibt, sodass  $\tilde{z}_1$  durch analytische Fortsetzung von  $[(f, U)]_{z_0}$  entlang  $\gamma$  entsteht. Zeigen Sie:

- (a)  $\tilde{X}$  ist offen in  $\bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z$ .
- (b)  $\tilde{X} = \{[(f, U)]_z : z \in U\}$ . (Hinweis: Hier muss man ein wenig Tüfteln.)
- (c) Die bekannte Projektion  $\pi: \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z \rightarrow \mathbb{C}$  ist eingeschränkt auf  $\tilde{X}$  injektiv.
- (d) Zu jedem Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  gibt es eine Hochhebung  $\tilde{\gamma}$  bezüglich  $\pi|_{\tilde{X}}$ , also eine stetige Abbildung  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ , welche das folgende Diagramm kommutativ macht:

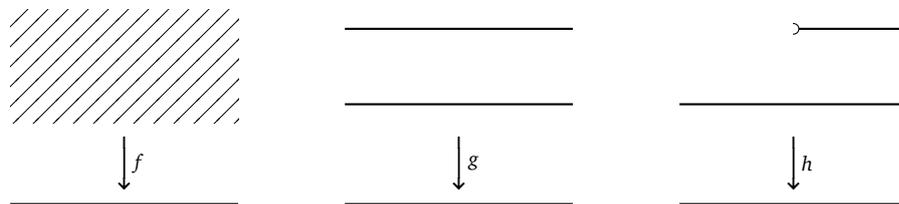


**9. Übung**

**9.1.** (Beispiele für Überlagerungen) (4 Punkte)

Beweisen Sie die in Beispiel 4.6 gemachten Aussagen, d.h. zeigen Sie:

- (a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ , ist *keine* Überlagerung.
- (b)  $g: \mathbb{R} \times \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ , ist eine Überlagerung.
- (c)  $h: (\mathbb{R} \times \{1\}) \cup (\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \times \{2\}) \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ , ist *keine* Überlagerung.
- (d)  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist eine Überlagerung (vgl. Abbildung 7 in Kapitel 1).
- (e)  $p_k: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^k$ , ist für  $k \in \mathbb{N}$  eine Überlagerung (vgl. Abbildung 14 in Kapitel 3).



**9.2.** (Überlagert der étalé-Raum die komplexen Zahlen?) (4 Punkte)

Handelt es sich bei der Projektion  $\pi: \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z \rightarrow \mathbb{C}$  um eine Überlagerung?

(Hinweis: Selbstverständlich ist auch eine stichhaltige Begründung gefordert.)

**9.3. (Ableitungsüberlagerung)**

Beweisen Sie Lemma 4.8:

$$d: \bigsqcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z \rightarrow \bigsqcup_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_z, \quad [(f, U)]_z \mapsto [(f', U)]_z,$$

ist eine Überlagerung.

**9.4. (Holomorphe Logarithmen)**

Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $f: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eine nullstellenfreie holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass es eine *holomorphe Logarithmusfunktion* zu  $f$  gibt, d.h. es gibt eine Funktion  $L_f: U \rightarrow \mathbb{C}$ , welche das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ & \nearrow L_f & \downarrow \exp \\ U & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{array}$$

**10. Übung****10.1. (Integration mittels analytischer Fortsetzung)** (4 Punkte)

Es sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ein geschlossener Weg in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $z_0 := \gamma(0) \in \mathbb{R}$  und  $z_0 > 0$ . Zu  $k \in \mathbb{N}$  sei  $[(\sqrt[k]{\cdot}, U)]_{z_0}$  derjenige Keim, der zu einer in einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  definierten holomorphen  $k$ -te-Wurzel-Funktion  $\sqrt[k]{\cdot}$  gehöre, wobei  $\sqrt[k]{z_0}$  reell und positiv sei. Bestimmen Sie dann das Integral

$$\int_{\gamma} \sqrt[k]{z} dz := \int_{\gamma} [(\sqrt[k]{\cdot}, U)]_{z_0}$$

in Abhängigkeit von  $k$ ,  $z_0$  und der Windungszahl  $\text{Ind}_{\gamma}(0)$  von  $\gamma$  um 0.

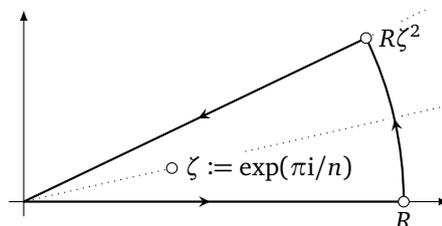
(Hinweis:  $k$ -te Wurzeln kann man ja mittels Logarithmen ausdrücken und der Logarithmus ist irgendwie mit der Windungszahl verwandt.)

**10.2. (Anwendung des Residuensatzes, I)** (4 Punkte)

Es sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl. Betrachten Sie die auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion  $f$  gegeben durch  $z \mapsto 1/(1+z^n)$  (wo der Nenner nicht Null ist).

(a) Berechnen Sie  $\text{Res}_f(z_0)$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$ . (Hinweis: *fast* immer Null.)

(b) Bestimmen Sie das Integral  $\int_0^{\infty} f(x) dx$ , indem Sie den Residuensatz auf den folgenden Weg  $\gamma_R$  anwenden und den Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  durchführen:



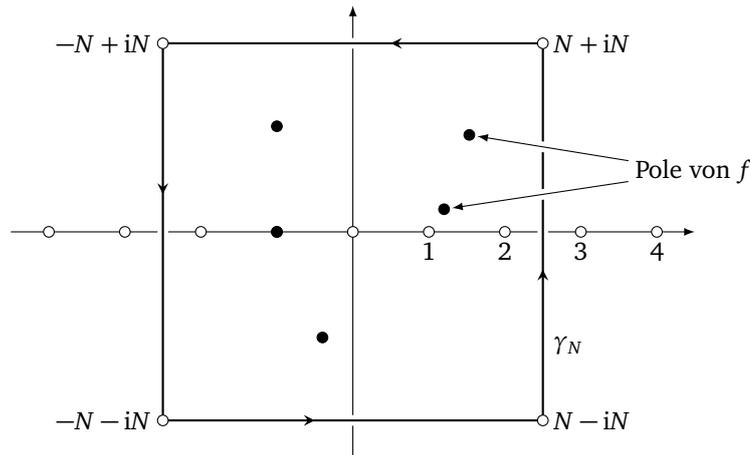
**10.3.** (Anwendung des Residuensatzes, II)

Es sei  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{C}$  eine endliche Menge und  $f: \mathbb{C} \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit Polstellen in jedem Punkt  $z_0 \in \mathcal{P}$ . Ferner sei  $z \mapsto z^2 f(z)$  sei beschränkt für alle  $z \in \mathbb{C}$  außerhalb einer kompakten Menge. Zeigen Sie:

- (a)  $\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in \mathbb{N} + 1/2}} \int_{\gamma_N} f(z) \pi \cot(\pi z) dz = 0$ ; hier bezeichne  $\gamma_N$  die Parametrisierung eines geschlossenen, quadratischen Weges mit Endpunkten  $\pm N \pm iN$  (siehe unten).

(Hinweis: Hier braucht man keine große Theorie, sondern im Wesentlichen nur die M-L-Abschätzung und die Definition des Cotangens  $\cot(z) = \cos(z)/\sin(z)$ .)

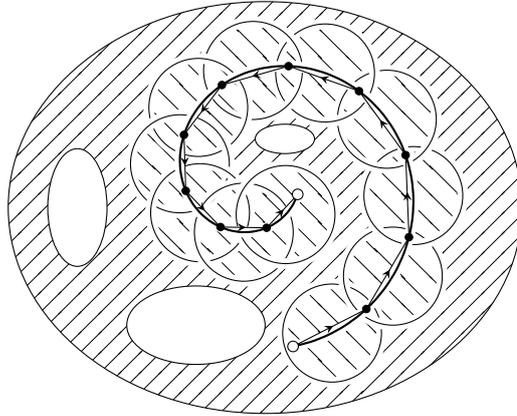
- (b)  $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{P}} f(n) = - \sum_{z_0 \in \mathcal{P}} \text{Res}_{z \rightarrow f(z) \pi \cot(\pi z)}(z_0)$ .
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**10.4.** (Wege  $\rightsquigarrow$  Polygonzüge)

Beweisen Sie Lemma 5.3: Es sei  $\Gamma$  eine beliebige Kette in einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph. Dann gibt es eine Kette  $\Gamma_* = \lambda_1 \gamma_1 + \dots + \lambda_n \gamma_n$  derart, dass alle  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) Polygonzüge sind und die folgende Gleichung gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_*} f(z) dz.$$

Hinweis:



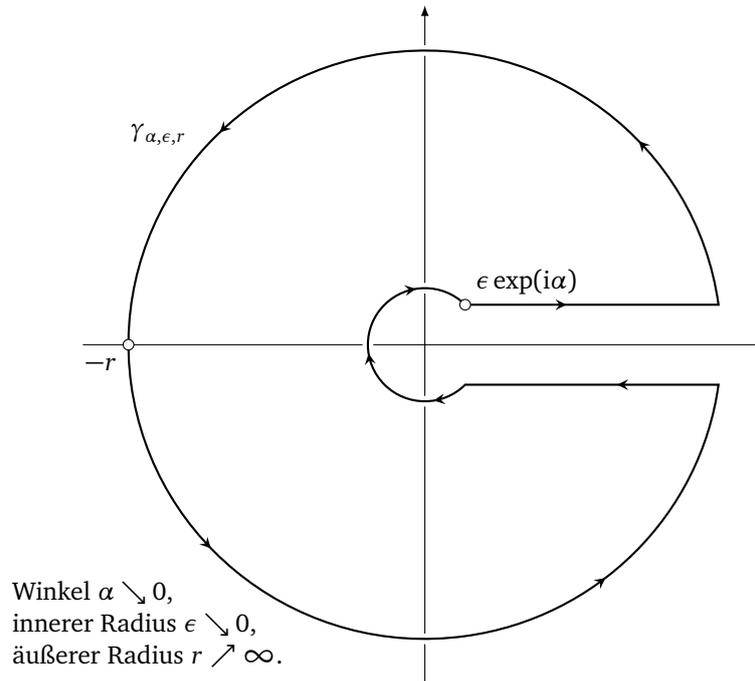
### 11. Übung

#### 11.1. (Integrale über $[0, \infty)$ und Pacman) (4 Punkte)

Es sei  $R \in \mathbb{C}(Z)$  eine rationale Funktion ohne Polstellen auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $z \mapsto |z^2 R(z)|$  sei beschränkt für alle  $z$  außerhalb einer geeigneten kompakten Menge. Ferner bezeichne  $L: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{S}(\pi)$  die Umkehrfunktion von  $\exp|_{\mathcal{S}(\pi)}: \mathcal{S}(\pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

(a) Integrieren Sie  $z \mapsto R(z)L(z)$  entlang des unten skizzierten Weges  $\gamma_{\alpha, \epsilon, r}$ , um mittels des Residuensatzes eine Formel für  $\int_0^\infty R(x) dx$  herzuleiten. (Hinweis: Für  $\alpha \searrow 0$  kann man auch einfach mittels analytischer Fortsetzung integrieren und sich so einige Abschätzungen sparen.)

(b) Berechnen Sie  $\int_0^\infty \frac{1}{x^3 - x^2 + 2} dx$  durch Anwendung Ihrer Formel aus Teil (a).



**11.2.** (Integrale mit Sinus und Kosinus über  $[0, 2\pi]$ ) (4 Punkte)

Es sei  $R \in \mathbb{C}(X, Y)$  eine rationale Funktion in zwei Variablen, die keine Polstellen auf  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  besitzt.

- (a) Geben Sie eine auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion  $f$  an, welche für alle  $t \in \mathbb{R}$  der Gleichung  $f(\exp(it)) = R(\cos(t), \sin(t))$  genügt.  
 (b) Wenden Sie den Residuensatz geeignet auf das Integral

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt$$

an, um dieses als Summe von Residuen zu schreiben.

- (c) Benutzen Sie die Resultate der vorherigen Teilaufgaben, um das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t) \cos(t)}{\cos(t)^2 - \sin(t)^2 - 2i \sin(t) \cos(t) - 4} dt$$

zu berechnen.

**11.3.** (Anwendung des Residuensatzes, III)

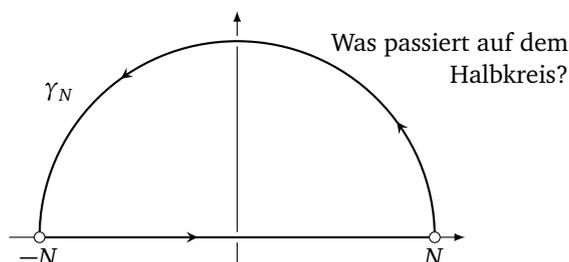
Es sei  $R \in \mathbb{C}(Z)$  eine rationale Funktion ohne Polstellen auf  $\mathbb{R}$  und der Grad des auftretenden Nenners sei gleich der Zählergrad plus Eins.

- (a) Leiten Sie aus dem Residuensatz eine Formel für den folgenden Grenzwert her:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N R(x) dx.$$

(Hinweis: Integrieren Sie über den unten skizzierten Weg  $\gamma_N$ .)

- (b) Existiert auch stets das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$  ?



#### 11.4. (Anwendungen vom Satz von Rouché)

- (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms  $Z^8 - 9Z^5 - 2Z + 1$  innerhalb der Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$ .
- (b) Benutzen Sie den Satz von Rouché, um (abermals) den Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.2) zu beweisen.
- (c) Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Umgebung von  $\overline{\mathbb{D}}$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph und erfülle  $\max\{|f(z)| : z \in \partial\mathbb{D}\} < 1$ . Zeigen Sie, dass es dann *genau ein*  $z_0 \in \mathbb{D}$  mit  $f(z_0) = z_0$  gibt.

### 12. Übung

#### 12.1. (Satz von Hurwitz)

(4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 6.3: Es sei  $(f_n)_n$  eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen  $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Außerdem seien  $a \in \mathbb{C}$  und  $m \in \mathbb{N}$  gegeben und für jedes  $f_n$  sei die mit Vielfachheiten gezählte Anzahl von  $a$ -Stellen von  $f$  höchstens  $m$ . Dann ist die Anzahl der  $a$ -Stellen der Grenzfunktion  $f$  entweder auch höchstens  $m$  oder  $f$  ist konstant  $a$ .

#### 12.2. (Gleichmäßige Konvergenz)

(4 Punkte)

Es sei  $(f_n)_n$  eine Folge ganzer Funktionen, die auf  $\mathbb{C}$  gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  konvergieren. Zeigen Sie dann, dass für alle hinreichend großen  $n$  die Funktionen  $f_n - f$  jeweils konstant sind.

(Bemerkung: Diese Aufgabe mag als Erklärung dafür dienen, weshalb man in der komplexen Analysis lieber mit *lokal* gleichmäßiger (äquivalent: kompakter) Konvergenz arbeitet.)

#### 12.3. (Die Gammafunktion)

Wir betrachten die rechte Halbebene  $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ . Im Folgenden schreiben wir  $t^z := \exp(\log(t)z)$  für reelle, positive  $t$ , wobei  $\log(t)$  den üblichen reellen Logarithmus von  $t$  bezeichne. Beweisen Sie:

- (a) Es gilt  $\int_0^1 \exp(-t)t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$  für alle  $z \in H$ .

(Hinweis: Potenzreihendarstellung und  $\int \sum = \sum \int$ .)

(b) Die durch

$$\Gamma: H \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_0^{\infty} \exp(-t)t^{z-1} dt$$

definierte Funktion ist holomorph.

(c)  $\Gamma$  lässt sich zu einer auf ganz  $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$  holomorphen Funktion fortsetzen.

(d) Es gilt  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  für alle  $z \in H$  und  $\Gamma(1) = 1$ .

Bei allen hier auftretenden Integralen sollten Sie sich auch kurz überlegen, weshalb diese existieren.

#### 12.4. (Die Riemannsche Zetafunktion)

Potenzen und die Gamma-Funktion  $\Gamma$  seien wie in Aufgabe 12.3 definiert. Für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  und reelle  $t > 0$  definiere

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{und} \quad \vartheta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-\pi n^2 t).$$

Zeigen Sie:

(a)  $\zeta: \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph,

(b)  $\int_0^{\infty} \exp(-\pi n^2 t) t^{(s/2)-1} dt = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) n^{-s}$ ,

(c)  $\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{(s/2)-1} (\vartheta(t) - 1) dt$ .

*Bemerkung:* Zusammen mit der Formel  $\vartheta(t) = t^{-1/2} \vartheta(1/t)$  (die man mit Hilfe der Poissonschen Summenformel und Beispiel 2.13 beweisen kann) lässt sich nachweisen, dass die rechte Seite der Gleichung in Teil (c) invariant unter der Ersetzung  $s \mapsto 1-s$  ist. Damit kann man sich dann überlegen, dass sich  $\zeta: \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch zu einer Funktion  $\zeta: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$  fortsetzen lässt. Diese Funktion und die Mysterien ihrer Nullstellenverteilung im sogenannten *kritischen Streifen*  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$  spielen eine fundamentale Rolle in der analytischen Zahlentheorie. Mehr dazu erfährt man in einschlägigen Spezialvorlesungen im Master-Studium.

### 13. Übung

#### 13.1. (Riemannscher Abbildungssatz, Eindeutigkeits teil)

(4 Punkte)

(a) Zeigen Sie

$$\{\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \text{ biholomorph}\} = \left\{ z \mapsto \xi \frac{z - \eta}{\bar{\eta}z - 1} : \xi \in \partial\mathbb{D}, \eta \in \mathbb{D} \right\}.$$

(Hinweis: Aufgabe 6.1.)

(b) Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $z_0 \in U$  beliebig. Zeigen Sie, dass es dann genau eine biholomorphe Abbildung  $f: U \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $f(z_0) = 0$  gibt derart, dass  $f'(z_0)$  reell und positiv ist.

(Hinweis: Die Existenz wurde schon in der Vorlesung gezeigt. Zum Beweis

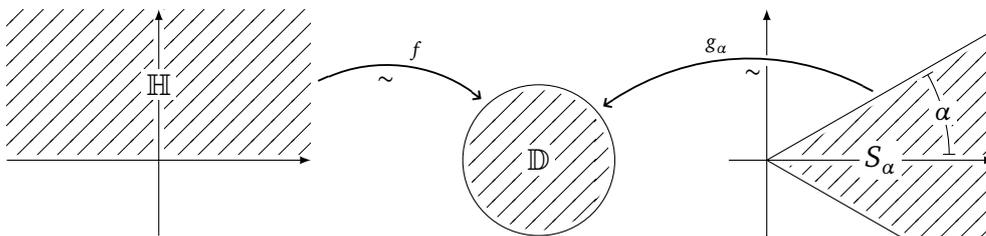
der Eindeutigkeit kann man einen Widerspruchsbeweis führen. Dabei hilft Teil (a).)

**13.2. (Biholomorphe Abbildungen, I)** (4 Punkte)

Es bezeichne  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  die obere Halbebene und für  $0 < \alpha \leq \pi$  sei  $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} : |\text{Im}(\text{Log}(z))| < \alpha\}$  ein Kreissektor. Bestimmen Sie

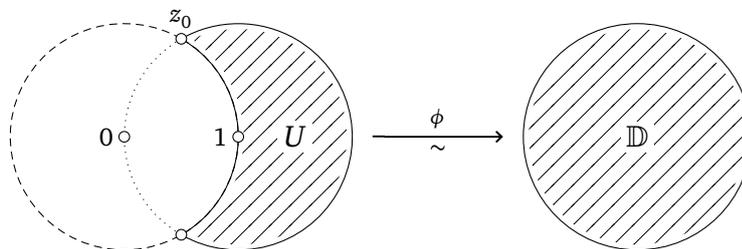
- (a) eine biholomorphe Abbildung  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $f(i) = 0$  und  $f'(i) \in \mathbb{R}_{>0}$ ,
- (b) eine biholomorphe Abbildung  $g_\alpha: S_\alpha \rightarrow \mathbb{D}$ .

(Hinweis: Mit Möbius-Transformationen und Wurzeln kommt man zum Ziel. Zur Lösung von Teil (a) hilft es vielleicht, zuerst eine beliebige Möbius-Transformation zu bestimmen, die  $\mathbb{H}$  biholomorph auf  $\mathbb{D}$  abbildet.)



**13.3. (Biholomorphe Abbildungen, II)**

Bestimmen Sie eine biholomorphe Abbildung  $\phi: U \rightarrow \mathbb{D}$  von  $U = B(1, 1) \setminus \bar{B}(0, 1)$  auf die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D} = B(0, 1)$ .



(Hinweis: Betrachten Sie das Bild von  $U$  unter der Möbius-Transformation  $z \mapsto (z - z_0)^{-1}$ . Falls man sich hier alle Details überlegen möchte, wird es ggf. aufwändig.)

**13.4. (Randverhalten biholomorpher Abbildungen)**

Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $f: U \rightarrow \mathbb{D}$  biholomorph. Ferner sei  $(z_n)_n$  eine Folge in  $U$ , die gegen einen Punkt auf dem Rand  $\partial U$  von  $U$  konvergiert.

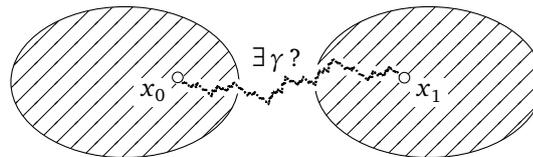
- (a) Zeigen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = 1$ .
- (b) Geben Sie ein Beispiel an, welches belegt, dass  $(f(z_n))_n$  i.Allg. nicht zu konvergieren braucht. (Hinweis: Aufgabe 13.2 (b) mit  $\alpha = \pi$ .)

## 1. Tutorium

### T1.1. (Zusammenhang)

Ein topologischer Raum  $X$  heißt bekanntlich *zusammenhängend*, falls sich dieser nicht als Vereinigung zweier nichtleerer, disjunkter, offener Teilmengen seiner selbst schreiben lässt. Ein topologischer Raum  $X$  heißt *wegzusammenhängend*, falls sich je zwei Punkte  $x_0, x_1 \in X$  durch einen Weg verbinden lassen, d.h. falls es eine stetige Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = x_0$  und  $\gamma(1) = x_1$  gibt. Zeigen Sie:

(a) Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.



(b) Jede zusammenhängende offene Menge  $X \subseteq \mathbb{C}$  ist wegzusammenhängend und die verbindenden Wege können sogar als Parametrisierungen von Polygonzügen gewählt werden.

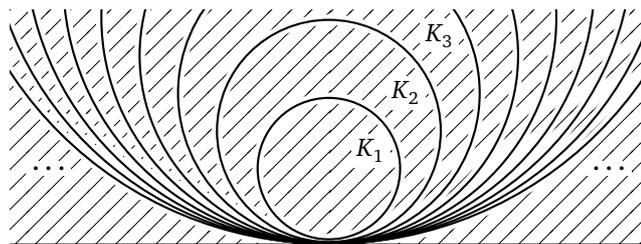
(c)  $B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  ist zusammenhängend.

### T1.2. (Spuren von Wegen und deren Komplemente)

Es sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg und  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$  ein Punkt, der nicht im Bild von  $\gamma$  enthalten ist. Zeigen Sie, dass  $z_0$  positiven Abstand zu  $\gamma([0, 1])$  hat, d.h. es gibt eine Kreisscheibe  $B(z_0, r)$  um  $z_0$  mit positivem Radius  $r$  und  $B(z_0, r) \cap \gamma([0, 1]) = \emptyset$ .

### T1.3. (Kompakte Ausschöpfung)

Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen. Zeigen Sie, dass es eine *Ausschöpfung von  $U$  durch kompakte Mengen* gibt, also eine Folge  $(K_n)_n$  von kompakten Mengen  $K_n$  derart, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Menge  $K_n$  im topologischen Inneren von  $K_{n+1}$  enthalten ist und  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  gilt.



## 2. Tutorium

T2.1. Bestimmen Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob diese wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung durch einen *Beweis* oder Angabe eines *Gegenbeispiels*. Im Folgenden sei  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph.

- (a) Die komplexe Konjugation  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ , ist in jedem Punkt  $z \neq 0$  komplex-differenzierbar.
- (b) Es gibt eine holomorphe Funktion  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(\mathbb{D}) = \mathbb{R}$ .
- (c) Gilt  $f(\exp(2\pi ix)) = \exp(-6\pi ix)$  für alle  $x \in \mathbb{Q}$ , so hat  $f$  in 0 einen Pol der Ordnung 3.
- (d) Für jeden Integrationsweg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, t \mapsto \exp(2\pi it)$ , gilt  $\int_{\gamma} f(z) dz \neq 0$ .

**T2.2.** Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von

$$f: B(3+i, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z^5 - 1}{z^2 + 3z - 4},$$

im Entwicklungspunkt  $3+i$ .

(Hinweis: Dieser ist größer als 1; Ihr Ergebnis sollen Sie selbstverständlich begründen.)

**T2.3.** Es sei  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Zeigen Sie

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{1-iT}^{1+iT} \frac{\exp(\xi z)}{z} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } \xi > 0, \\ 0 & \text{falls } \xi < 0. \end{cases}$$

(Hinweis: Integrieren Sie je nach  $\xi > 0$  oder  $\xi < 0$  über einen geschlossenen Weg, der sich entweder um 0 oder doch nicht um 0 windet.)



## Literaturverzeichnis

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. Düsseldorf etc.: McGraw-Hill, 3rd edition, 1979.
- [2] J. Bak and D. J. Newman. *Complex analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. New-York, NY: Springer, 3rd edition, 2010.
- [3] H. Behnke and F. Sommer. *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Berlin: Springer, 1976.
- [4] L. Bieberbach. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *Berl. Ber.*, 1916:940–955, 1916.
- [5] L. de Branges. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.*, 154:137–152, 1985.
- [6] J. D. Dixon. A brief proof of Cauchy’s integral theorem. *Proc. Am. Math. Soc.*, 29:625–626, 1971.
- [7] W. Fulton. *Algebraic topology. A first course*, volume 153. New-York, NY: Springer, 1995.
- [8] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [9] K. Jänich. *Einführung in die Funktionentheorie*. Berlin: Springer, 2nd edition, 1980.
- [10] K. Jänich. *Funktionentheorie. Eine Einführung*. Berlin: Springer, 6th edition, 2004.
- [11] S. Lang. *Complex analysis*, volume 103 of *Graduate Texts in Mathematics*. New-York, NY: Springer, 4th ed. edition, 1999.
- [12] P. D. Lax and L. Zalcman. *Complex proofs of real theorems*. Number 58 in Univ. Lect. Ser. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2012.
- [13] S. D. Mitrović and J. D. Kečkić. *The Cauchy method of residues. Theory and applications. Translated from the Serbo-Croatian by J. D. Kečkić*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [14] R. Narasimhan. *Compact Riemann surfaces*. Basel: Birkhäuser, 1992.
- [15] T. Needham. *Visual complex analysis*. Oxford: Clarendon Press, 1997.
- [16] J. Roe. Lectures on complex analysis, December 2016. <https://www.ams.org/open-math-notes/omn-view-listing?listingId=110646>.
- [17] W. Rudin. *Reelle und komplexe Analysis*. München: Oldenbourg Verlag, 1999.
- [18] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003.

- [19] T. Tao. Sendov's conjecture for sufficiently-high-degree polynomials. *Acta Math.*, 229(2):347–392, 2022.
- [20] E. Wegert. *Visual complex functions. An introduction with phase portraits*. Basel: Birkhäuser, 2012.