21. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ die folgende Identität:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{\substack{i,k=1 \\ k<i}}^{n} (a_k b_i - a_i b_k)^2$$

und leiten Sie daraus die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

her.

22. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ die *Abelsche Summation*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} s_k (b_{k+1} - b_k),$$

wobei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist.

23. Finden Sie eine Bijektion zwischen $(0,1]$ und $(0,1] \times (0,1]$. Verwenden Sie diese Erkenntnis um zu beweisen, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gleichmächtig sind.

    Hinweis: Sie dürfen dabei die Dezimaldarstellung reeller Zahlen und deren Eigenschaften verwenden.

24. Lösen Sie folgende Gleichung über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:

$$\frac{(1-2i)z+9}{(3-4i)z-(9-4i)} = 8+5i$$

25. Wir betrachten die Gleichung $z^5 - 1 = 0$ über $\mathbb{C}$.

    (a) Bestimmen Sie die Lösungen obiger Gleichung.
    Hinweis: Die Substitution $w = z + \frac{1}{z}$ könnte hilfreich sein.

    (b) **Freiwillig:** Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Pythagoras, dass die Lösungen am Einheitskreis mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können.

26. Untersuchen Sie, welche Teilmenge von $\mathbb{C}$ durch folgende Bedingungen festgelegt wird und stellen Sie sie in der Gauß'schen Zahlenebene dar:

    (a)

$$\left|\frac{z-1-i}{z-2}\right| = 1$$

    (b)

$$|z-1| < \operatorname{Im}(z) + 1 \qquad \wedge \qquad |\arg(z)| \leq 60^\circ$$