EINIGE KOMMENTARE ZU EINER BIN–PACKING AUFGABE VON W. KNÖDEL

Helmut Prodinger

Institut für Algebra und Diskrete Mathematik
Technische Universität Wien, A-1040 Wien, Austria

Abstract. W. Knödel has considered a bin–packing problem which can be seen within the context of random walks. The height of a random walk is a well studied parameter which can also be defined in Knödels model. Its average is computed and shown to be of order $\sqrt{n}$. The methods include singularity analysis of generating functions as well as Mellin transforms.

Herrn Professor W. Knödel
zum 65. Geburtstag (20.5.1991) gewidmet

1. Einleitung

W. Knödel [5], [7], vgl. auch [8] betrachtete ein *bin–packing* Problem, welches zu einem Irrfahrten–Problem (”random walk”) äquivalent ist:

Fig. 1

Unter der Annahme, daß alle 3^n Wege der Länge n, die vom Zustand 0 ausgehen, gleich wahrscheinlich sind, ist die mittlere Nummer des erreichten Zustands zu bestimmen, wobei dem Spezialzustand β die Nummer 2 zuzuordnen ist. (In Knödels Formulierung die ”Nummer” $\frac{1}{2}$, aber das ist völlig analog zu behandeln, und die asymptotischen Ergebnisse stimmen im Hauptterm überein.)

In dieser Arbeit können alle lokalen und asymptotischen Entwicklungen im Prinzip hergeschrieben werden; aus Gründen der Kürze begnügen wir uns jedoch stets mit dem Hauptterm und deuten weitere Terme durch ”$+\dots$” an.

Satz 1. [Knödel] *Die mittlere "Nummer" E_n des erreichten Zustands nach n Schritten ist asymptotisch*

$$2\sqrt{\frac{n}{3\pi}} + \dots \, . \quad \square$$

Im Kapitel 2 wird eine Herleitung dieses Ergebnisses skizziert.

Hier sind wir, motiviert von der Interpretation der Irrfahrten, am Parameter H_n interessiert, nämlich der *maximalen* erreichten Nummer während eines Weges der Länge n, vgl. z.B. [2] und [6] ("Höhe").

Satz 2. *Die mittlere Höhe H_n, die nach n zufälligen Schritten erreicht wurde, ist asymptotisch*

$$\sqrt{\frac{\pi n}{3}} + \dots \, . \quad \square$$

Das Kapitel 2 ist der Herleitung dieses (schwierigeren) Problems gewidmet.

Als Vergleich wollen wir noch die entsprechenden Resultate angeben für den Fall, der im Studium der Irrfahrten eher üblich ist, nämlich dem in Figur 2 dargestellten.

Fig. 2

Dieser Fall ensteht durch Fortlassung des Zustands β. Natürlich ist die Gesamtanzahl der Wege der Länge n, durch die man dividieren muß, nicht mehr 3^n. Bezeichnen wir die entsprechenden Parameter mit $\widetilde{E_n}$ und $\widetilde{H_n}$, dann gilt

Satz 3.

$$\widetilde{E_n} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{3}} + \dots \, . \quad \square$$

Satz 4.

$$\widetilde{H_n} \sim 2(\log 2)\sqrt{\pi n} + \dots \, . \quad \square$$

Die numerischen Konstanten, die jeweils als Faktor von $\sqrt{n}$ auftreten, sind

$$\frac{2}{\sqrt{3\pi}} = 0,6514\dots \qquad \sqrt{\frac{\pi}{3}} = 1,0233\dots$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{3}} = 1,0233\dots \qquad 2(\log 2)\sqrt{\pi} = 2,4571\dots$$

Diese Einleitung mag mit einem Hinweis auf die asymptotische Technik abgeschlossen werden. Das asymptotische Verhalten wird stets aus dem lokalen Verhalten der entsprechenden erzeugenden Funktionen in der Nähe ihrer dominanten Singularitäten gewonnen. Um dieses Verhalten zu ermitteln, bedient man sich der Mellin–Transformation; deren Umkehrtransformation ist nämlich ein komplexes Kurvenintegral, das asymptotisch durch die Residuen angegeben werden kann. Diese Vorgangsweise ist etwa in [3] und [4] beschrieben.

2. Analysis

Sei für $i = 0, 1, \dots$ oder $i = \beta$

$$\varphi_i(x) = \sum_{n \ge 0} \begin{bmatrix} \text{Anzahl der Pfade der Länge } n, \\ \text{die von 0 nach } i \text{ führen} \end{bmatrix} x^n,$$

und

$$\varphi_{i,h}(x) = \sum_{n \ge 0} \begin{bmatrix} \text{Anzahl der Pfade der Länge } n, \\ \text{die von 0 nach } i \text{ führen} \\ \text{und Höhe} \le h \text{ haben} \end{bmatrix} x^n.$$

Das System der φ_i's wird durch folgende Matrix–Gleichung beschrieben.

$$\begin{pmatrix} 1-x & -x & -x & & & \\ -x & 1-x & & & & \\ -x & -x & 1-x & -x & & \\ & & -x & 1-x & -x & \\ & & \ddots & -x & 1-x & -x \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_\beta \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Die $\varphi_{i,h}$'s erfüllen ein "abgeschnittenes" System mit $h+2$ Zeilen; dies gilt nur für $h \ge 2$, die Werte $h = 0$ und $h = 1$ müssen extra behandelt werden.

Außerdem sei

$$\Phi_h(x) = \sum_i \varphi_{i,h}(x)$$

die erzeugende Funktion, wo das Ende nicht festgelegt ist. i durchläuft im Normalfall die Werte $0, 1, \dots$ und β.

Die Berechnung der $\varphi_{i,h}$'s erfolgt mit der Cramerschen Regel. Dazu sei zunächst $a_h(x)$ die folgende Determinante (h die Anzahl der Zeilen):

$$a_h(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -x & & \\ -x & 1-x & -x & \\ & -x & 1-x & -x \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix},$$

Durch Entwicklung etwa nach der ersten Zeile erhält man

$$a_h = (1-x)a_{h-1} - x^2 a_{h-2}, \quad a_0 = 1, \ a_1 = 1-x,$$

und daher

$$a_h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x-3x^2}} \left[\left(\frac{1-x+\sqrt{1-2x-3x^2}}{2} \right)^{h+1} - \left(\frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2} \right)^{h+1} \right]$$

Dieser Ausdruck erinnert an *Motzkin–Bäume*, und die Substitution $x = v/(1+v+v^2)$ ist in diesem Kontext hilfreich. Man beachte, daß die Singularität, die in der Einleitung erwähnt wurde, $x = \frac{1}{3}$ ist; in der v–Sprechweise ist sie $v = 1$. Man erhält

$$a_h(x) = \frac{1}{1-v^2} \frac{1-v^{2h+2}}{(1+v+v^2)^h}.$$

Nun sei $b_h(x)$ die Determinante des eigentlichen Systems mit $h+2$ Zeilen; durch Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt sich

$$b_h = (1-2x)a_h - x^2 a_{h-1} = \frac{1}{1+v} \frac{1+v^{2h+3}}{(1+v+v^2)^{h-1}}.$$

Durch Cramers Regel zur Auflösung des linearen Gleichungssystems folgt nun für $h \geq 2$

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,h} &= \frac{(1-x)a_h}{b_h} = \frac{1+v^2}{1-v} \frac{1-v^{2h+2}}{1+v^{2h+3}}, \\
\varphi_{\beta,h} &= \frac{x a_h}{b_h} = \frac{v}{1-v} \frac{1-v^{2h+2}}{1+v^{2h+3}}, \\
\varphi_{i,h} &= \frac{x^i a_{h-i}}{b_h} = \frac{1+v+v^2}{1-v} v^i \frac{1-v^{2h-2i+2}}{1+v^{2h+3}}, \quad i \geq 1.
\end{aligned}$$

Die Sonderfälle sind

$$\varphi_{0,1} = \frac{1+v^2}{1-v+v^2}, \quad \varphi_{1,1} = \frac{v}{1-v+v^2}, \quad \varphi_{0,0} = \frac{1+v+v^2}{1+v^2}.$$

Die erzeugenden Funktionen ohne Höheneinschränkung ergeben sich auch analytisch für $h \to \infty$:

$$\varphi_0 = \frac{1+v^2}{1-v}, \quad \varphi_\beta = \frac{v}{1-v}, \quad \varphi_i = \frac{v^i(1+v+v^2)}{1-v}, \quad i \geq 1.$$

Man errechnet durch Summation

$$\Phi_h(x) = \frac{1+v+v^2}{(1-v)^2} \frac{(1-v^{h+1})(1-v^{h+2})}{1+v^{2h+3}} \quad h \geq 2,$$

sowie

$$\Phi_1(x) = \frac{1+v+v^2}{1-v+v^2}, \quad \Phi_0(x) = \frac{1+v+v^2}{1+v^2}.$$

$h \to \infty$ ergibt die erzeugende Funktion *aller* Wege:

$$\frac{1+v+v^2}{(1-v)^2} = \frac{1}{1-3x}.$$

Sei nun

$$F(x) = \sum_{h \geq 0} \left[\frac{1}{1-3x} - \Phi_h(x) \right],$$

dann ist die gesuchte mittlere Höhe E_n

$$3^{-n}[x^n]F(x),$$

wo $[x^n]F(x)$ den Koeffizienten von x^n in $F(x)$ bezeichnet. Man errechnet nun

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{h\geq 2} \frac{(1+v+v^2)(1+v)v^{h+1}}{(1-v)^2(1+v^{2h+3})} + \dots \\
&= \frac{(1+v+v^2)(1+v)}{(1-v)^2} v^{-1/2} \sum_{h\geq 3} \frac{v^{h+\frac{1}{2}}}{1+v^{2h+1}} + \dots \\
&= \frac{(1+v+v^2)(1+v)}{(1-v)^2} v^{-1/2} \sum_{h\geq 0} \frac{v^{h+\frac{1}{2}}}{1+v^{2h+1}} + \dots .
\end{aligned}$$

Nun sei (mit $v = e^{-t}$)

$$\begin{aligned}
G(v) &= \sum_{h\geq 0} \frac{v^{h+\frac{1}{2}}}{1+v^{2h+1}} = \sum_{h\geq 0} e^{-t(h+\frac{1}{2})} \sum_{j\geq 0} (-1)^j e^{-j(2h+1)t} \\
&= \sum_{h,j\geq 0} (-1)^j e^{-\frac{t}{2}(2h+1)(2j+1)}.
\end{aligned}$$

Wir berechnen die Mellin–Transformierte dieses Ausdrucks (vgl. [3], [4] für eine Darstellung).

$$\begin{aligned}
G^*(s) &= 2^s\Gamma(s) \sum_{h,j\geq 0} (-1)^j (2h+1)^{-s}(2j+1)^{-s} \\
&= 2^s\Gamma(s)\zeta(s)(1-2^{-s})\beta(s).
\end{aligned}$$

Dabei ist (Notation von [1])

$$\beta(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + - \ \dots\ ;$$

man kann $\beta(s)$ auch mit der Hurwitzschen ζ–Funktion ausdrücken,

$$\beta(s) = 4^{-s}\left(\zeta(s,\frac{1}{4}) - \zeta(s,\frac{3}{4})\right).$$

Die Mellinsche Umkehrformel sagt

$$G(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty} \Gamma(s)\zeta(s)(2^s-1)\beta(s)t^{-s}\,ds.$$

Um die angekündigte lokale Entwicklung zu erhalten, verschiebt man die Integrationsgerade nach links und sammelt die Residuen. Der erste Pol ist bei $s = 1$ (von der ζ–Funktion); er ist einfach, und das Residuum ist

$$\beta(1)\frac{1}{t} = \frac{\pi}{4t}.$$

Also

$$G(v) \sim \frac{\pi}{4t},$$

und daher $(1 - v \sim t)$

$$F(x) \sim \frac{3 \cdot 2}{t^2} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4t} + \cdots = \frac{3\pi}{2}\frac{1}{t^3} + \dots .$$

Da $t \sim \sqrt{3}\sqrt{1-3x}$, heißt das

$$F(x) \sim \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\frac{1}{(1-3x)^{3/2}},$$

und weiter

$$[x^n]F(x) \sim 3^n \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\frac{n^{1/2}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = 3^n \frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{3}},$$

was nach Division durch 3^n den Satz 2 ergibt.

Knödels Resultat folgt sofort: Da

$$\varphi_i = \frac{v^i(1+v+v^2)}{1-v},$$

folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i\ge 0} i\varphi_i + 2\varphi_\beta &= \frac{1+v+v^2}{1-v}\frac{v}{(1-v)^2} + \dots \\ &= \frac{3}{t^3} + \dots \sim \frac{1}{\sqrt{3}}(1-3x)^{-3/2} + \dots ;\end{aligned}$$

der Koeffizient von $[x^n]$ darin ist asymptotisch

$$3^n \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}n^{1/2} = 3^n\, 2\sqrt{\frac{n}{3\pi}};$$

das ist Satz 1.

Nun wollen wir noch kurz das Modell entsprechend Figur 2 skizzieren: Es ist

$$\varphi_{i,h} = \frac{x^i a_{h-i}}{a_{h+1}} = v^i(1+v+v^2)\frac{1-v^{2h-2i+2}}{1-v^{2h+4}},$$

und

$$\Phi_h = \sum_{i=0}^{h} \varphi_{i,h} = \frac{1+v+v^2}{1-v}\frac{(1-v^{h+1})(1-v^{h+2})}{1-v^{2h+4}}.$$

Die erzeugende Funktion *aller* Wege ist der Grenzwert für $h \to \infty$:

$$\frac{1+v+v^2}{1-v}.$$

Man muß wie vorher

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{h\ge 0}\left[\frac{1+v+v^2}{1-v} - \frac{1+v+v^2}{1-v}\frac{(1-v^{h+1})(1-v^{h+2})}{1-v^{2h+4}}\right] \\ &= \frac{(1+v+v^2)(1+v)}{1-v}\sum_{h\ge 1}\frac{v^h}{1+v^h} + \dots \end{aligned}$$

betrachten. Sei wieder

$$G(v) = \sum_{h\ge 1}\frac{v^h}{1+v^h};$$

die Transformierte ist $(v = e^{-t})$

$$G^*(s) = \Gamma(s)\zeta^2(s)(1-2^{1-s}).$$

Also

$$G(v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac32 - i\infty}^{\frac32 + i\infty} \Gamma(s)\zeta^2(s)(1-2^{1-s})t^{-s}\,ds.$$

Bei $s = 1$ gibt es einen einfachen Pol mit Residuum $\dfrac{\log 2}{t}$. Daher

$$F(x) \sim \frac{6}{t}\cdot\frac{\log 2}{t} + \dots = \frac{6\log 2}{t^2} + \dots = \frac{2\log 2}{1-3x} + \dots .$$

Der Koeffizient von x^n darin ist asymptotisch $3^n 2\log 2$. Diese Größe muß dividiert werden durch

$$\begin{aligned} &[x^n]\frac{1+v+v^2}{1-v} \sim [x^n]\frac{3}{t} \\ &\sim [x^n]\sqrt{3}(1-3x)^{-1/2} \sim \sqrt{3}\,3^n\frac{n^{-1/2}}{\Gamma(\frac12)} \\ &= 3^n\sqrt{\frac{3}{\pi n}}. \end{aligned}$$

Das ergibt Satz 4. Für Satz 3 beobachtet man

$$\varphi_i = v^i(1+v+v^2)$$

und

$$\sum_{i\ge 0} i\varphi_i = (1+v+v^2)\frac{v}{(1-v)^2} \sim \frac{3}{t^2} = \frac{1}{1-3x};$$

der Koeffizient von x^n darin ist asymptotisch 3^n. Wieder muß dieser Ausdruck durch $3^n\sqrt{\frac{3}{\pi n}}$ dividiert werden.

Literatur

1. M.Abramowitz, I.A.Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1970.
2. N.G.De Bruijn, D.E.Knuth, and S.O.Rice, *The average height of planted plane trees*, Graph Theory and Computing, R.C.Read, Ed., Academic Press, New York – London, 1972, pp. 15–22.
3. P.Flajolet and A.M.Odlyzko, *Singularity Analysis of Generating Functions*, SIAM J. Disc. Math. **3** (1990), 216–240.
4. P.Flajolet and J.S.Vitter, *Average–Case Analysis of Algorithms and Data Structures*, Handbook of Theoretical Computer Science, J. van Leeuwen, Ed., North-Holland, 1990.
5. W.Knödel, *Über das mittlere Verhalten von on-line Packungsalgorithmen*, EIK **19** (1983), 427–433.
6. W.Panny and H.Prodinger, *The expected height of paths for several notions of height*, Stud. Sci. Math. Hung. **20** (1985), 119–132.
7. H.Prodinger, *Einige Bemerkungen zu einer Arbeit von W.Knödel über das mittlere Verhalten von on-line-Packungsalgorithmen*, EIK **21** (1985), 3–7.
8. H.Prodinger, *Further Results on a Problem of Knödel concerning the Analysis of Bin-Packing*, Number–Theoretic Analysis, E.Hlawka, R. F. Tichy (Eds.) Lecture Notes in Mathematics **1452** (1990), 193–198.

Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstrasse 8-10
A-1040 Wien
AUSTRIA