1. Übungsblatt Funktionalanalysis — 08.10.2009

Übung 1. Seien (X, d) ein metrischer Raum und $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ eine stetig differenzierbare Funktion mit den folgenden Eigenschaften:
(a) $f(0) = 0$.
(b) $f(x) > 0 \ \forall x > 0$.
(c) $f(x)$ mononoton wachsend.
(d) $\frac{f(x)}{x}$ monoton fallend.
Zeige, daß $\tilde{d}(x, y) = f(d(x, y))$ eine Metrik auf X ist.

Übung 2. Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, daß die Bedingungen
(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(2) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \ \forall x, y, z \in X$
gemeinsam die Bedingungen

$$d(x, y) \geq 0 \text{ und } d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall x, y \in X$$

implizieren.

Übung 3. Seien (X, d) ein metrischer Raum und $\psi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ eine strikt monoton wachsende konkave Funktion mit $\psi(0) = 0$. Dann ist $d_\psi(x, y) = \psi(d(x, y))$ ebenfalls eine Metrik auf X.

Überprüfe die Vollständigkeit der folgenden metrischen Räume.

Übung 4. Der Raum $C([a, b])$ der stetigen Funktionen mit der Metrik

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| .$$

Übung 5. Der Raum $C([a, b])$ mit der Metrik

$$d(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Übung 6. Der Raum

$$\ell^1 = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \sum |x_k| < \infty\}$$

mit der Metrik $d(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|$.

Übung 7. Zeige, daß die Funktion

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

eine Metrik auf $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ definiert.

Übung 8. Zeige, daß $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ mit der Metrik

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

ein vollständiger metrischer Raum ist.

Übung 9. Finde einen metrischen Raum (X, d) und zwei Kugeln $B(x, r_1)$, $B(y, r_2)$, sodaß $r_1 > r_2$ und $B(x, r_1) \subsetneqq B(y, r_2)$