2. Übungsblatt Funktionalanalysis — 29.10.2009

Übung 10. Auf $\mathbb{R}$ sei die Metrik $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ gegeben. Zeige, daß $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig ist und konstruiere die Vervollständigung.

Übung 11. Finde eine Metrik, die das halboffene Intervall $X =]0,1]$ zu einem vollständigen metrischen Raum macht.

Übung 12. Sei T eine Kontraktion des metrischen Raums (X,d) mit Kontraktionsfaktor $0 < q < 1$ und Fixpunkt $\bar{x}$. Zeige, daß für einen beliebigen Startpunkt x_0, $x_n := T^n x_0$, die Abschätzungen

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x_0, Tx_0)$$
$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{1}{1-q}\, d(x_n, Tx_n)$$

gelten.

Übung 13. Zeige, daß die Folge (x_n) von Kettenbrüchen

$$2,\ 2 + \frac{1}{2},\ 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}},\ 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}},\ \ldots$$

konvergiert und finde den Grenzwert mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes.

Übung 14. Sei $T : X \to X$ eine Abbildung auf einem vollständigen metrischen Raum (X,d) mit der Eigenschaft $d(Tx,Ty) < d(x,y)$ für $x \neq y$ und so, daß die Bildmenge $T(X)$ relativ kompakt ist (d.h., der Abschluß $\overline{T(X)}$ ist kompakt).

(a) Zeige, daß T einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.
(b) Zeige, daß für jeden beliebigen Startpunkt x_0 die Folge $x_{n+1} = Tx_n$ gegen diesen Fixpunkt konvergiert.

Übung 15. Finde ein Beispiel für eine Abbildung $T : X \to X$ auf einem vollständigen metrischen Raum (X,d) mit der Eigenschaft $d(Tx,Ty) < d(x,y)$ für $x \neq y$, jedoch ohne Fixpunkt.

Übung 16. Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Abbildung, deren n-fache Hintereinanderausführung T^n, für ein fixes n, die Eigenschaft besitzt, daß $d(T^n x, T^n y) \leq q\, d(x,y)$, wobei $0 < q < 1$. Zeige, daß T einen eindeutigen Fixpunkt hat.

Übung 17. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeige

(a) Der Abschluß von A besteht aus A und den Berührungspunkten von A.
(b) $x \in X$ ist ein Häufungspunkt von A genau dann, wenn es eine Folge (x_n) verschiedener Elemente von A gibt, sodaß $x_n \to x$ gilt.
(c) $x \in \bar{A}$ genau dann, wenn es eine Folge (x_n) aus A gibt mit $x_n \to x$.

Übung 18. Finde eine absteigende Folge abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit leerem Durchschnitt.

Übung 19. Finde ein Beispiel eines vollständigen metrischen Raums (X, d) und einer absteigenden Folge von nichtleeren offenen Kugeln $B(x_n, r_n)$, sodaß

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) = \emptyset$$

Übung 20. Zeige oder widerlege: "Seien A_i, $i = 1, 2, \dots$ abgeschlossene Teilmengen eines vollständigen metrischen Raumes. Wenn die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ eine offene Kugel enthält, dann gibt es ein A_k, das eine offene Kugel enthält."