3. Übungsblatt Funktionalanalysis — 12.11.2009

Übung 21. Zeige, daß die abgeschlossene Einheitskugel in jedem normierten Raum konvex ist.

Übung 22. Zeige, daß für $1 < p < \infty$ die abgeschlossene Einheitskugel in ℓ^p *strikt konvex* ist, d.h:

$$\text{wenn } \|x\|_p = \|y\|_p = 1 \text{ und } x \neq y, \text{ dann } \left\|\tfrac{1}{2}(x+y)\right\|_p < 1$$

Übung 23. Sei $X = \{a, b\}$ und μ das Maß mit $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \frac{1}{2}$ und sei $L^p(X, \mu)$ der entsprechende L^p-Raum über $\mathbb{R}$.

(a) Skizziere die abgeschlossenen Einheitskugeln in $L^p(X, \mu)$ für $1 \leq p \leq \infty$.

(b) Gibt es Werte von p, für die die abgeschlossene Einheitskugel ein Quadrat oder ein Kreis ist?

(c) Was ändert sich, wenn $\mu(\{a\}) \neq \mu(\{b\})$ ist?

Überprüfe die Konvergenz der Folge (x_n) im Banachraum E, wenn

Übung 24. $E = l^1$, und

$$x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n^s}, \frac{1}{(n+1)^s}, \ldots)$$

mit $s > 1$.

Übung 25. $E = l^2$ und

$$x_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots).$$

Übung 26. $E = L^2([0, 1])$ und

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{n}\,t & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

Übung 27. Sei

$$L = \{x = (x_k) \in E : \sum x_k = 0\}$$

Ist L ein abgeschlossener Unterraum von E für

(a) $E = l^1$?

(b) $E = l^p$, $p > 1$?

Übung 28. *Zwei Normen $\|\ \|_1$ und $\|\ \|_2$ auf einem Vektorraum X heißen* ***äquivalent****, wenn es Konstanten C_1 und C_2 gibt, sodaß $\forall x \in X$*

$$\|x\|_1 \leq C_1 \|x\|_2 \ \textit{ und } \ \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

Sind die Normen

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f| \, d\lambda + \max |f'|$$

$$\|f\|_2 = \max |f| + \max |f'|$$

auf dem Raum $C_1([0, 1])$ der stetig differenzierbaren Funktionen äquivalent?

Übung 29. Zeige, daß $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f|$ eine Norm auf $L^\infty([0, 1])$ definiert und daß $(L^\infty([0, 1]), \|\ \|_\infty)$ ein Banachraum ist.