4. Übungsblatt Funktionalanalysis — 26.11.2009

Eine Norm $\| \ \|$ auf einem Banachraum X heißt
(a) **strikt konvex**, wenn für alle $x, y \in X$ gilt

$$\|x\| = \|y\| = 1 \wedge \|x + y\| = 2 \implies x = y$$

(b) **gleichmäßig konvex**, wenn für alle Folgen $x_n, y_n \in X$ mit $\|x_n\|, \|y_n\| \leq 1$ gilt

$$\|x_n + y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \implies \|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Übung 30. Zeige, daß die Norm

$$|||f||| = \|f\|_\infty + \|f\|_{L^2[0,1]}$$

auf dem Raum $C[0,1]$ der stetigen Funktionen strikt konvex und zur üblichen Norm $\| \ \|_\infty$ äquivalent ist, und daß die Norm $\| \ \|_\infty$ alleine nicht strikt konvex ist.

Übung 31. Zeige, daß in einem Banachraum X mit gleichmäßig konvexer Norm jede abgeschlossene konvexe Menge einen eindeutigen Punkt mit minimaler Norm besitzt.

Übung 32. Zeige, daß jede absteigende Folge M_n abgeschlossener, beschränkter und konvexer Mengen in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ (oder Banachraum mit gleichmäßig konvexer Norm) nichtleeren Durchschnitt hat.

Lineare Operatoren.

Übung 33. Sei $k : [0,1] \times [0,1]$ durch

$$k(s,t) = \begin{cases} |s-t|^{-\alpha}, & \text{für } s \neq t \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Zeige, daß für $0 < \alpha < 1$ das Integraloperator $T_k : C[0,1] \to C[0,1]$ mit

$$(T_k x)(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)dt$$

stetig ist.

Übung 34. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $T_f : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ mit $g \mapsto f * g$, d.h

$$(T_f g)(s) = (f * g)(s) = \int_0^1 f(s-t)g(t)dt$$

Zeige daß $T_f g$ beschränkt ist und bestimme $\|T_f g\|$.

Hilbert Räume.

Übung 35. Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum, der die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

erfüllt. Zeige, daß

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2)$$

ein Skalarprodukt definiert und daher X ein Prä-Hilbertraum ist.
Wegweiser: Zeige nacheinander für $x, y, z \in X$

(a) $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$
(b) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
(c) $\langle x+y, z\rangle = 2\langle x, z/2\rangle + 2\langle y, z/2\rangle$
(d) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ für $\lambda \in \{1, -1, i, -i\}$.
(e) $\langle x+y, z\rangle + \langle x-y, z\rangle = \langle 2x, z\rangle$
(f) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
(g) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ für $\lambda \in \mathbb{Q}$.
(h) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ für $\lambda \in \mathbb{C}$.

Übung 36. Zeige, daß für eine Projektion P auf einem Hilbertraum H und $x, y \in H$ gilt

$$\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle = \langle Px, Py\rangle$$

Übung 37. Sei $\varphi \in L^2([0,1])$ eine Funktion mit der Eigenschaft, daß

$$\varphi(t) + \varphi(t+1/2) = 0 \qquad \forall t \in [0, 1/2]$$

Deren periodische Fortsetzung mit Periode 1 auf $\mathbb{R}$ bezeichnen wir ebenfalls mit φ.
Zeige daß die Folge

$$\varphi_n(t) = \varphi(2^n t), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

orthogonal in $L^2([0,1])$ ist.