5. Übungsblatt Funktionalanalysis — 10.12.2009

Übung 38. Zeige, daß die Einheitskugel eines unendlichdimensionalen Hilbertraums H unendlich viele disjunkte Kugeln vom Radius $1/4$ enthält.

Übung 39. Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $\omega = e^{2\pi i/N}$ eine primitive N-te Einheitswurzel der Ordnung $N \geq 3$. Zeige daß die **Polarisationsidentität**

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \omega^k \left\|x + \omega^k y\right\|^2$$

gilt.

Übung 40. Sei H ein Hilbertraum und $P : H \to H$ eine stetige lineare Transformation. Zeige, daß P eine Orthogonalprojektion (auf einen abgeschlossenen Unterraum) ist genau dann, wenn $P^2 = P$ und $\|P\| \leq 1$.

Übung 41. Sei $f : L^2[-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, mit $f(x) = x$. Bestimme die Fourierreihe von f und berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ mit der Parsevalschen Gleichung.

Übung 42. Finde das Polynom zweiten Grades, das die Funktion $f(x) = x^{10}$ am besten in $L^2([0, 1], \mu)$ approximiert, wobei μ gegeben ist durch die Dichte $d\mu(x) = 6x(1-x)\, d\lambda(x)$.

Übung 43. Sei (a_n) eine gegen ∞ divergente Folge komplexer Zahlen. Zeige, daß eine Folge (ε_n) komplexer Zahlen existiert mit der Eigenschaft, daß $\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n| < \infty$ und gleichzeitig die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ divergiert.
Hinweis: Banach-Steinhaus anwenden

Übung 44. Sei (α_n) eine Folge positiver Zahlen mit der Eigenschaft, daß

$$\sum \alpha_n \beta_n < \infty$$

für jede Folge (β_n) mit $\sum |\beta_n|^2 < \infty$. Zeige, daß $\sum \alpha_n^2 < \infty$.
Hinweis: Banach-Steinhaus anwenden auf die Folge der Funktionale $f_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots)$ *auf* ℓ^2.

Übung 45. Sei E ein Banachraum und $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von normierten Räumen und $T_{m,n} : E \to F_m$, $m, n \in \mathbb{N}$ stetige lineare Operatoren, sodaß für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt $\sup_n \|T_{m,n}\| = \infty$. Zeige

$$\exists x_0 \in E\, \forall m \in \mathbb{N} : \sup_n \|T_{m,n} x_0\| = \infty$$

Hinweis: Betrachte die Menge

$$\bigcup_{m,N\in\mathbb{N}} \{x \in E : \sup_n \|T_{m,n} x\| \leq N\}$$