6. Übungsblatt Funktionalanalysis — 14.01.2010

(6.1) Definition. Seien X und Y normierte Räume, $D \subset X$ sei ein Untervektorraum, $T : D \to Y$ sei eine lineare Abbildung. Dann heißt T *abgeschlossen*, falls gilt:

$$\text{Konvergiert die Folge } (x_n), x_n \in D, \text{ gegen } x \in X \text{ und konvergiert}$$
$$(Tx_n), \text{ etwa gegen } y \in Y, \text{ so folgt } x \in D \text{ und } Tx = y.$$

Übung 46. Seien jetzt $X = Y = L^2[-1,1]$, $D = C^1[-1,1]$, und $T : D \to Y$ durch $Tx = x'$ definiert. Zeige dass T nicht abgeschlossen ist.

Übung 47. Sei X ein Vektorraum und $\| \,\|_1$, $\| \,\|_2$ zwei Normen, sodaß X sowohl bezüglich $\| \,\|_1$ als auch $\| \,\|_2$ vollständig ist und außerdem gilt $\exists \alpha > 0 : \| \,\|_1 \leq \alpha \| \,\|_2$. Zeige

$$\exists \beta > 0 : \| \,\|_2 \leq \beta \| \,\|_1$$

Übung 48. Sei M ein Unterraum eines Hilbertraums H und f ein beschränktes lineares Funktional auf M. Zeige, daß f eine *eindeutige* Fortsetzung $\tilde{f}$ auf H besitzt und daß $\tilde{f} |_{M^\perp} = 0$.

Übung 49. Ein Banachraum X heißt *injektiv* wenn für jeden Banachraum Y gilt: Jeder beschränkte lineare Operator $T : Z \to X$ auf einem Unterraum $Z \subseteq Y$ läßt sich zu einem Operator $\tilde{T} : Y \to X$ fortsetzen und zwar so, daß $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Zeige, daß ℓ^∞ injektiv ist.

Übung 50. Zeige, daß $c_0^* = \ell^1$.

Übung 51. Finde ein Funktional $F \in c_0^*$, das seine Norm nicht annimmt, d.h.,

$$\forall x \in c_0 \setminus \{0\} : |F(x)| < \|F\| \, \|x\| \, .$$

Folgerung: c_0 ist nicht reflexiv (Hahn-Banach).

Übung 52. Zeige, daß Eindeutigkeit der Hahn-Banach Fortsetzung im L^1 nicht gegeben ist.
Hinweis: Betrachte das Funktional

$$F(f) = \int_0^{1/2} f \, d\lambda$$

auf dem Unterraum

$$E = \{f \in L^1([0,1]) : \int_0^1 f \, d\lambda = 0\} \subseteq L^1([0,1])$$